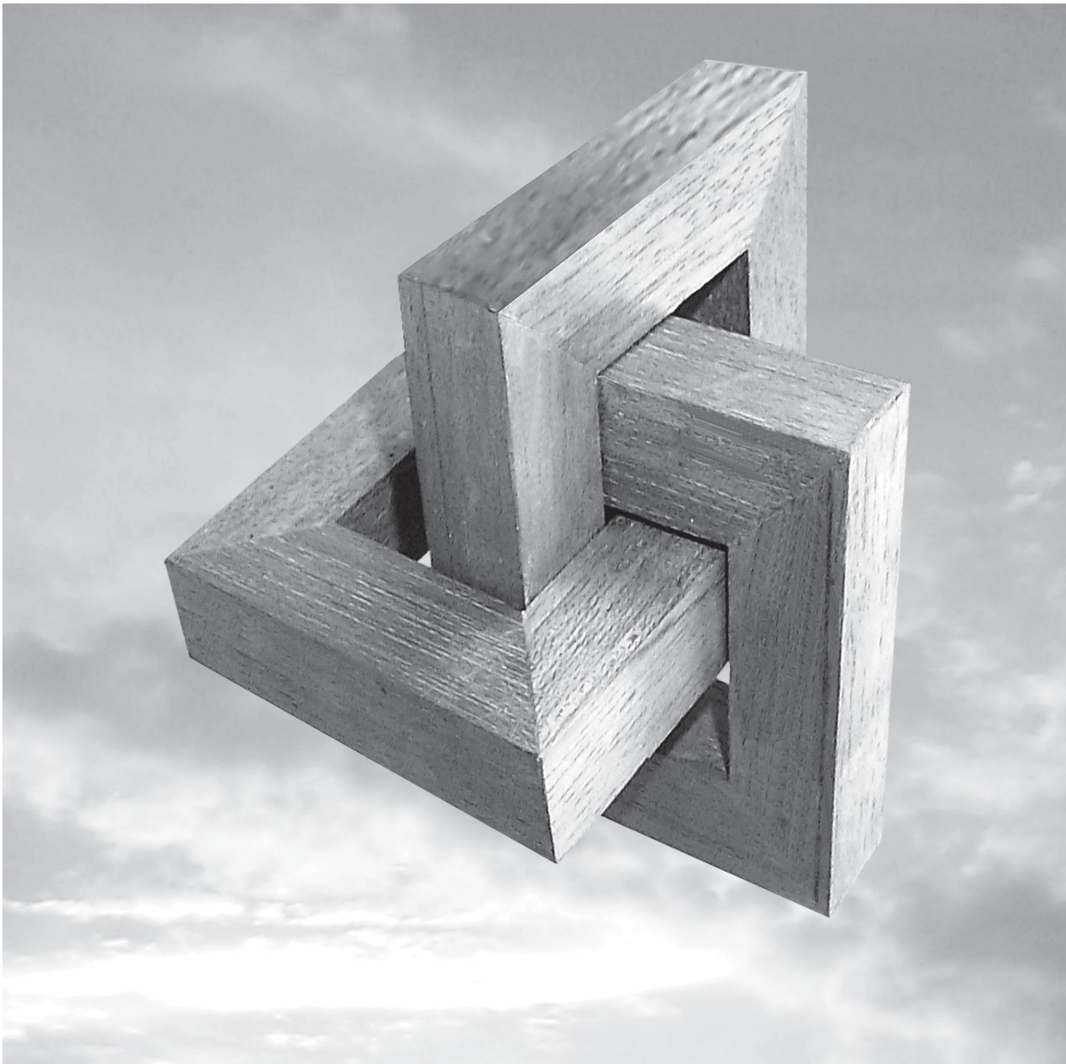
ARTHESIS

jaargang 19, nummer 2



een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis

inhoud

ARTHESIS

jaargang 19 nummer 2 - september 2005

Arthesis is een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis en wordt gratis toegezonden aan de donateurs van de Stichting. Losse nummers: € 3,50 (bestelwijze: zie kader op pag. 19).

omslag knoop Koos Verhoeff, montage Ineke Lambers

redactie Bart Heukelom
Rinus Roelofs
Ineke Lambers (vormgeving)

redactie-adres Bart Heukelom
Alexanderstraat 18
4191 GB Geldermalsen
email: b.heukelom@wxs.nl

inzenden kopij
Bij voorkeur in digitale vorm: tekst als WP- of Word-bestand; illustraties in de vorm van een goede foto of duidelijke tekening (indien mogelijk het origineel, liever geen scan of fotokopie), of digitaal aangemaakt (vectortekening in CDR of AI format; bitmaps als JPG of Tiff bestand en in voldoende hoge resolutie).

drie keer kunstige wiskunde

In de afgelopen tijd is een aantal kunstenaars die laten zien dat wiskunde een rol speelt bij het maken van hun werk, in contact gekomen met Ars et Mathesis. Omdat de relatie tussen wiskunde en kunst op vele manieren kan worden ingevuld leek het een goed idee om bij drie kunstenaars op bezoek te gaan en hun de vraag voor te leggen hoe zij de rol van de wiskunde bij hun beroep als kunstenaar invullen. We geven een korte impressie van onze bezoeken en laten van elke kunstenaar enkele voorbeelden van hun werk zien.

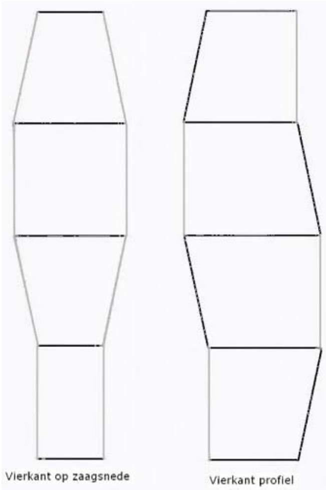
Roland de Jong-Orlando

Bij De Jong-Orlando thuis (een verbouwde boerderij) is het duidelijk dat hier een kunstenaar woont die graag met vlakvullingen "speelt". Hij vertelt dat wiskunde op de middelbare school zijn sterkste vak was. Ook tegenwoordig is er bij hem nog steeds een fascinatie voor wiskunde, vooral als het gaat om allerlei doorsneden van buizen en balken. Als kunstenaar experimenteert hij voortdurend bij het zoeken naar doorsneden die op een of andere manier een verwondering of spanning oproepen.

Bij het ontwerpen van zijn beelden gaat hij uit van een bepaalde zelfgemaakte module: "Ik maak één blokje en daar moet ik het gewoon mee doen". Het wiskundige aspect in zijn werk is deze basismodule, een wiskundig omschreven constructie. Door een serie van die modules op de een of andere manier aan elkaar te koppelen ontstaat een ontwerp, vaak eerst in de vorm van een schaalmodel, waarbij ritme, symmetrie en harmonie belangrijke overwegingen zijn (afb. 2 en 3 op pag. 4).
Bij het ontwikkelen van een beeld voor een kunstopdracht neemt hij die module ook als uitgangspunt, maar natuurlijk laat hij zich vooral ook inspireren door de omgeving, omdat het kunstwerk volgens hem wel "contact moet maken" met de omgeving waar het komt te staan. Het kan zijn dat een kunstwerk in een bepaalde behoefte zal voorzien, zoals een speeltuig dat tot leven komt doordat kinderen het gebruiken bij het klimmen (afb. 1), of dat een kunstwerk een reactie op de omgeving is.

afb. 1 - 'Meeting Point'

Door een aantal modules achter elkaar te plaatsen zoekt hij naar nieuwe ontwerpen voor een kunstwerk dat een zekere zeggingskracht heeft.



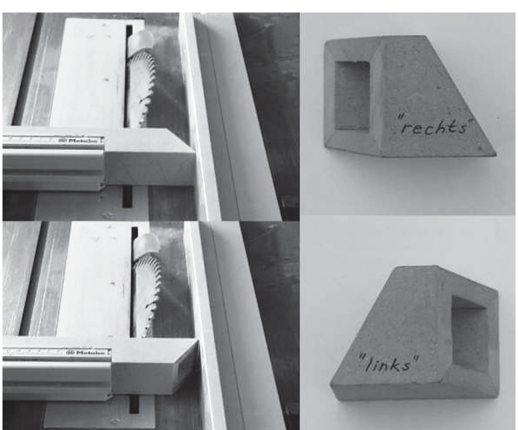
afb. 2 - vergelijking blokvormen

In de fase van experimenteren en onderzoeken maakt hij gebruik van een systematische opbouw en spelen wiskundige berekeningen een veel kleinere rol. Sterker nog: zelfs die systematiek moet wijken als het resultaat niet is wat hem voor ogen staat.

Een goed voorbeeld is het kunstwerk bij de gemeentewerf van Meppel (afb. 4). Hier wordt de zakelijk strakke structuur van het gebouw van de gemeentewerf doorbroken door de spiraalvorm van het kunstwerk. Maar ook in het kunstwerk zelf wordt een strakke structuur doorbroken: de kunstenaar heeft het voor 80% opgebouwd volgens een strikte regel, maar voor het laatste gedeelte is hij daarvan afgeweken. Aangezien hij voornamelijk vormgericht is, speelt kleur een minder belangrijke rol in zijn beelden. Toch is het mooi te zien hoe de vlakken in zijn beelden, soms zelfs bij toeval (verwering van het materiaal, lichtval op de vlakken), een bepaalde kleur krijgen, hetgeen zo zijn eigen effecten kan hebben.

"Orde in het groot en chaos in het klein" is een uitspraak van Roland de Jong-Orlando, waarmee hij aangeeft dat er binnen zijn strenge, 'simpele' beelden (een spiraal, een bolvorm of driehoek) vaak een wirwar van vormen zit, als een soort onderhuidse chaos.

afb. 3 - productie modules



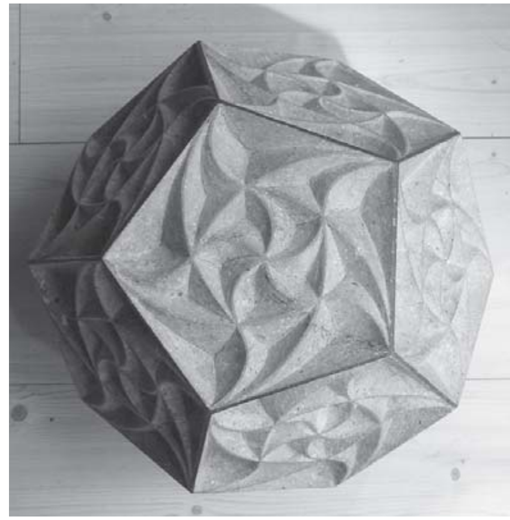
afb. 4 - bij de gemeentewerf Meppel

Wim Reus

Wim Reus introduceerde zichzelf op de Ars et Mathesisdag met de mededeling dat hij alleen maar een beitel en hamer gebruikt. Zijn woonkamer staat dan ook vol met beeldhouwwerk van diverse soorten steen en op een tafel ligt het grootste boek over Leonardo da Vinci.
Hij wil zichzelf liever geen kunstenaar noemen maar een steenhouwer met 20 jaar ervaring. Thuis wordt er niet aan de beelden gewerkt omdat het werken aan dergelijk objecten zeer veel stof geeft en daar heeft hij dus een aparte werkruimte voor.

afb. 5

Uitgangspunt bij zijn werk is zijn belangstelling voor wiskundige objecten, zoals bijvoorbeeld het twaalfvlak en de Möbiusband (afb. 5). Maar ook bij het maken zijn een wiskundig inzicht en nauwkeurige procedures noodzakelijk. Om bijvoorbeeld het twaalfvlak uit een brok steen te houwen wordt eerst een kubus gezaagd. Daarna zal er volgens een bepaalde van te voren uitgedachte procedure uit deze kubus een twaalfvlak gebeiteld worden (afb. 6).



afb. 6

Bij het uitbeitelen van het twaalfvlak uit de kubus gaat hij er van uit dat ribben van het twaalfvlak samenvallen met vlakken van de kubus.
Ook bij hem is er sprake van zoeken en experimenteren. Het twaalfvlak (ongeveer 25 kilo zwaar) inspireerde hem tot werk van de zelfde omvang waarbij hij onder andere gebruik maakt van een vrije interpretatie van de gulden snede.

Een andere manier van onderzoeken is bijvoorbeeld om te laten zien welke indruk een bepaalde draaiing kan maken, anders gezegd welk effect een bepaalde torsie kan hebben.
In afb. 7 bovenaan de volgende pagina zijn twee stenen voorwerpen te zien die ieder ongeveer 10 cm hoog zijn. Bij het ene voorwerp is te zien dat het grondvlak een regelmatig vijfhoek is die naar boven toe een draaiing van 72 graden maakt en bij het andere dat het grondvlak een gelijkzijdige driehoek is die naar boven toe onder een hoek van 120 graden is ge-

afb. 7

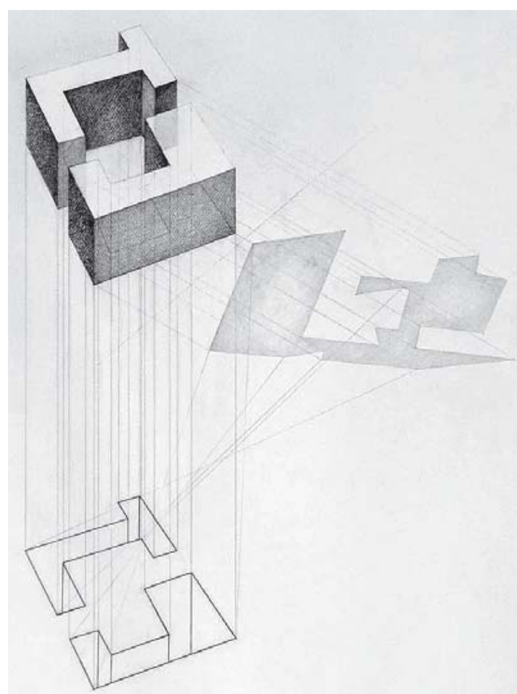
draaid. De torsie met de regelmatige vijfhoek komt wat saai over in vergelijking met de torsie van de gelijkzijdige driehoek.

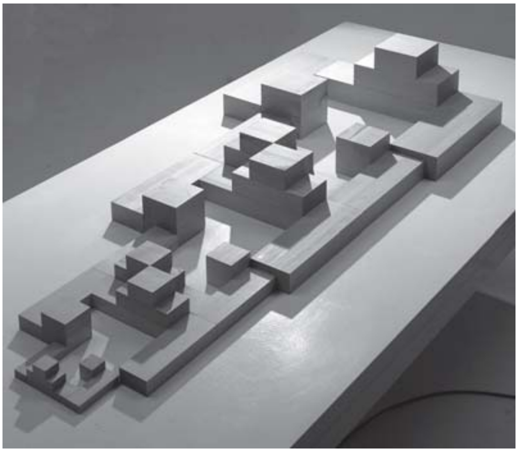
Corrie Kuijs

Het atelier van Corrie Kuijs in een voormalig klaslokaal staat vol met tweedimensionale en driedimensionale kunst. En dat typeert dan ook meteen de ontwikkeling in het werk van Corrie Kuijs.
Zij begon haar loopbaan als kunstenares met schilderen en ontdekte al gauw dat dit bij haar weer vragen naar essenties opriep. Uiteindelijk heeft zij de wiskunde ter hand genomen bij haar pogingen haar vragen te doorgronden. Zij deed dit door duidelijke perspectief-tekeningen te gaan maken en bracht op deze wijze een orde in haar ontwerpen (afb. 8). De geometrie was voor haar noodzakelijk om tot een essentie en kernachtigheid te komen. Voor haar werd wiskunde op deze wijze een belangrijk instrument bij de ontwikkeling van haar werk.

Bij haar zoektocht kwam zij ook in contact met het werk van Dom Van der Laan (hij was kloosterling, architect, ontwerper). Dat inspireerde haar om een beetje op dezelfde wijze te werk te gaan: Als basis neemt zij een blokje van ongeveer 1 x 3 x 3 cm, waarna een tweede basisblokje is te maken door twee blokjes op elkaar te stapelen (dus 2 x 3 x 3 cm), een derde blokje door twee blokjes naast elkaar te leggen (1 x 3 x 6 cm) en een vierde door nog een basisblokje toe te voegen (1 x 3 x 9 cm). Met deze blokjes als uitgangspunt ontwerpt zij zeven modules (3 liggend, 3 zittend en 1 staand) en deze zijn dan weer de basiscomponenten om voor opdrachtgevers diverse ontwerpen mee te maken. In afb. 9 is onderaan een module te zien die is samengesteld uit een aantal van de bovenomschreven blokjes. De zelfde module wordt nu nog twee maal gemaakt met twee keer zo grote afmetingen, nog twee maal met drie maal zo grote afmetingen en de module bovenaan heeft vier maal zo grote afmetingen als de module waarvan zij is uitgegaan.

afb. 8





afb. 9

Deze modules stellen haar in staat als kunstenares te gaan onderzoeken wat de effecten zijn van bepaalde materialen of kleuren op de vlakken. Soms gebruikt zij alleen de schaduwen die drie-dimensionale kunstwerken in haar atelier op muur of vloer werpen, waardoor een vervreemdend effect ontstaat (afb. 10); het prachtig kleurgebruik is hier helaas niet weer te geven.

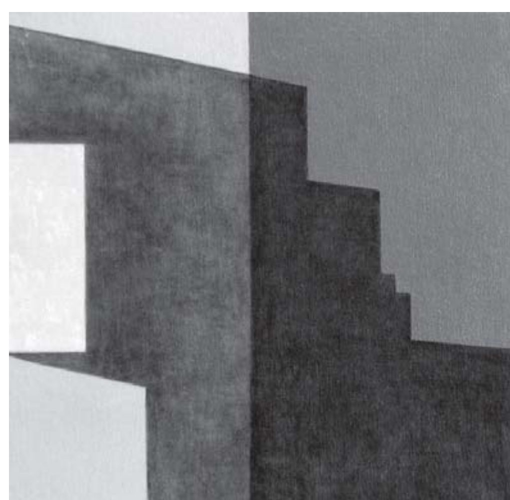
Corrie Kuijs zegt over haar werk het volgende:
"De architectonische ruimte is nog steeds het vertrekpunt van waaruit ik werk. Maar het verlangen naar zuiverheid en kernachtigheid in het beeldende werk is groter geworden. Om tot die kernachtigheid te komen zoek ik met behulp van houten blokken naar opstellingen die 'zuivere ruimte' laten zien, ontdaan van elke functionaliteit. Deze blokken vormen met elkaar een speelveld waaruit ik kan citeren en die mij als zodanig 'vormen' leveren waarmee ik composities in het platte vlak kan opbouwen".
"Er ligt een grote schoonheid verborgen in schijnbaar onbeduidende zaken zoals lichtval en schaduwwerking, nabijheid en afstand, in het ritme van volumes, in massa versus leegte. Met name het complementaire karakter van het licht en haar schaduw boeit mij eindeloos. Zij geven een nieuwe dimensie en spanning aan onze werkelijkheid en aan die van mijn schilderijen. Schilderkunstig gezien is het een uitdaging om grote contrasten in licht en donker, koel en warm, transparant en opaak te verwezenlijken."

na de interviews

We hebben met drie verschillende kunstenaars gesproken over de rol van de wiskunde bij hun werkzaamheden. En we hebben ook drie totaal verschillende manieren gezien waarop de wiskunde en de kunst met elkaar worden verweven. Een belangrijk aspect is de mate waarin verwondering en fascinatie aan de wiskunde worden gekoppeld, dan wel dat de wiskunde alleen als hulpmiddel wordt gebruikt.

Henny Susijn en Bart Heukelom

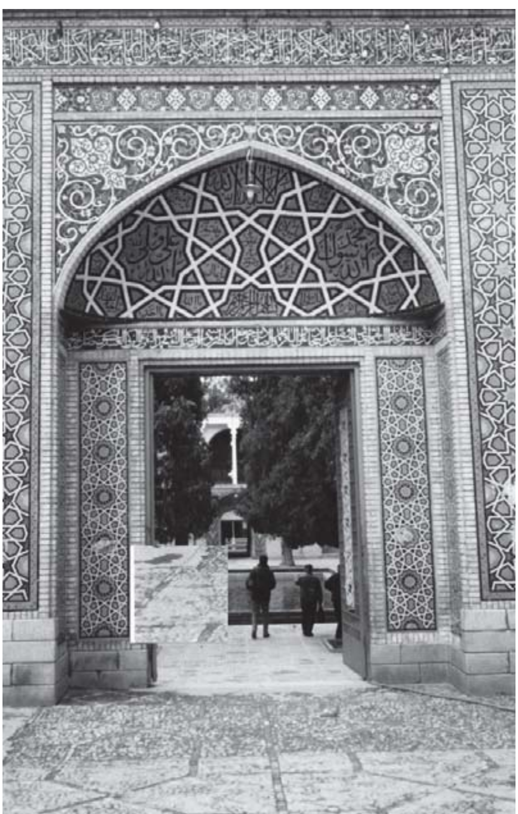
afb. 10



de Topkapi boekrol

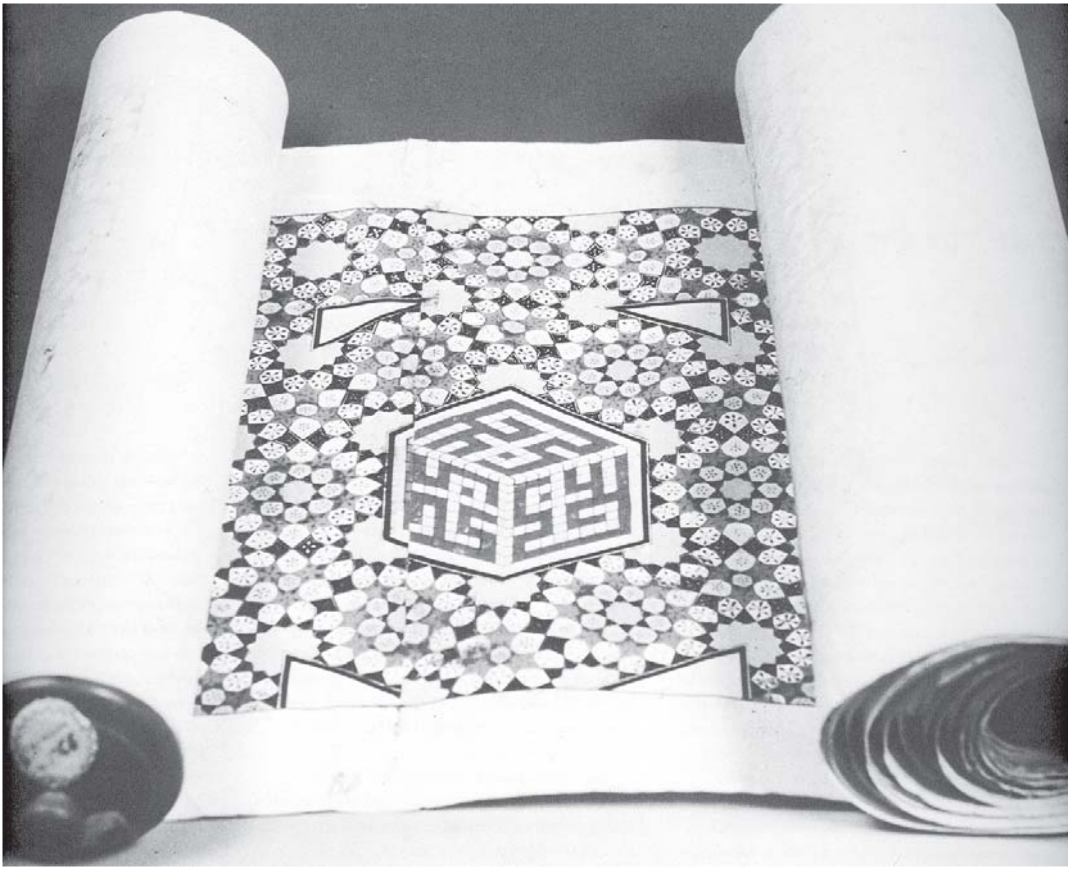
De geschiedenis van de wiskunde vind ik een interessant onderdeel van de wiskunde. Vragen die op de Middelbare School voor mij niet beantwoord konden worden kwamen met dit vak op zowel de lerarenopleiding als de Universiteit van Utrecht tot hun recht. Vanwege deze interesse en door mijn contacten met Prof. Dr. Jan Hogendijk kwam ik in aanraking met de wanddecoraties van de Islamitische Kunst. Tijdens een rondreis in Iran probeerde ik de achterliggende structuur van de decoraties op wanden en koepels te achterhalen. Ik herkende bekende meetkundige figuren (vaak ingebed in sterren), zoals de regelmatige veelhoeken - voornamelijk met 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16 zijden - en zag dat deze figuren in elkaar overliepen. Vanwege mijn verwondering over deze decoraties ontstond het idee voor een scriptie.

ingangspoort van een graftombe in Mahan, Kerman



Een nadeel hierbij was dat er weinig tot geen wetenschappelijke boeken over de achterliggende structuur van Islamitische wanddecoraties zijn geschreven. Eventuele oorspronkelijke bronnen en teksten uit de Islamitische wetenschap over dit onderwerp zijn verloren gegaan, zijn niet te verkrijgen of zijn wel beschikbaar maar in het Arabisch of Perzisch geschreven. Overigens denk ik dat bij het vervaardigen van de wanddecoraties in de Islamitische Kunst mondelinge overlevering tussen handwerkslieden een belangrijke rol speelde.

Uiteindelijk vond ik in de privé-collectie van Hogendijk een boek met prachtige tekeningen: *"The Topkapi Scroll-Geometry and Ornament in Islamic Architecture"*, geschreven door Gülru Necipoğlu.
De Topkapi boekrol (zo noem ik deze boekrol) is een 16e eeuwse boekrol waarin 114 tekeningen opgenomen zijn, echter zonder tekstuele verklaring. Necipoğlu, hoogleraar in de Islamitische Kunst en Architectuur aan de Harvard Universiteit (VS), beschrijft deze boekrol vanuit een kunsthistorisch perspectief.



de Topkapi boekrol opengeslagen

de Topkapi boekrol

De Topkapi boekrol is een boekrol van 29,5 meter lang en 33 à 34 cm hoog, waarin 114 tekeningen in vierkante of rechthoekige raamwerken te zien zijn. Hierboven is een afbeelding te zien van de Topkapi boekrol.

De tekeningen zijn loodrechte projecties van ruimtelijke figuren naar vlakke figuren én tweedimensionale figuren, de zogenaamde mozaïeken. Deze ruimtelijke figuren worden aangeduid met het Arabische woord *muqarnas,* qua structuur te vergelijken met een honingraat gecombineerd met een stalactietengewelf. Deze structuren komen in de Islamitische architectuur veel voor. De tekeningen zijn uit herhaalde meetkundige en stervormige figuren samengesteld. De figuren bevinden zich altijd in een raamwerk van zwarte lijnen, soms met stippellijnen. De boekrol bestaat enkel uit tekeningen, er is tot op heden geen tekstuele verklaring gevonden. Momenteel is de boekrol eigendom van de museumbibliotheek van het Topkapi-paleis in Istanbul, Turkije, en wordt bewaard met als code MS H. 1956.

de Topkapiboekrol beschreven door Necipoğlu

Volgens Gülru Necipoğlu is de boekrol samengesteld in Iran, zo tussen eind 15e en begin 16e eeuw (zie Necipoğlu blz. 29). Ze geeft deze schatting op basis van haar onderzoek, want datum en plaats zijn niet in de boekrol vermeld. Hoe de boekrol deel is gaan uitmaken van de kunstschattencollectie van het voormalige Ottomaanse Rijk is niet bekend.

Het boek van Necipoğlu verdeel ik globaal onder in drie delen:
1) beschrijving van de boekrol vanuit architectonisch en meetkundig perspectief;
2) een catalogus van patroontypen en een catalogus van 114 tekeningen;
3) een kleurenreproductie van de 114 tekeningen van de Topkapi boekrol, weergegeven op 50% van de ware grootte van de tekeningen uit de boekrol.

In deel 1 beschrijft Necipoğlu de boekrol dus vanuit een architectonisch en meetkundig perspectief (blz. 1-230). Ik zie dit eerder als een beschrijving van vergelijkbare meetkundige patronen op oude boekrollen en Islamitische gebouwen vanuit een kunsthistorisch perspectief. In hoofdstuk 4, getiteld *Geometry and the contribution of Mathematical Science* (blz. 131-184) behandelt ze de zeer weinige documenten die bewaard zijn en die mogelijk met de boekrol te maken hebben (zie hiervoor ook Hogendijk). Dit levert echter weinig op, en geeft geen inzicht in de manier waarop de mozaïekmakers hebben gewerkt.

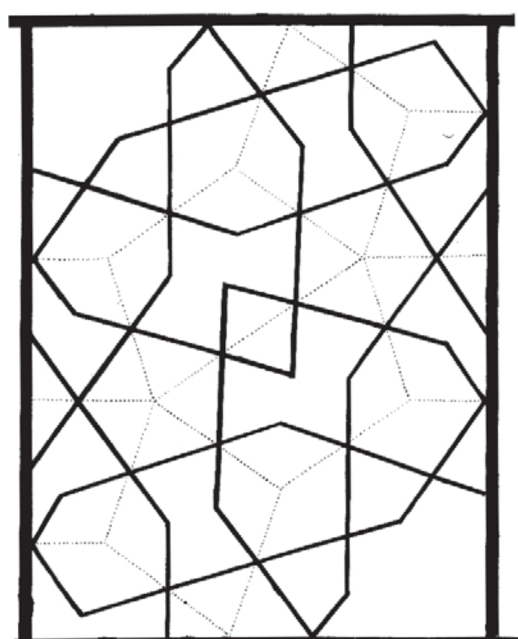
In deel 2 (zie blz. 231-238) verdeelt Necipoğlu de patroontypen onder in vier groepen:
1. tweedimensionale patronen die zijn opgebouwd uit een roosterwerk van vierkantjes (zoals A-4 ruitjes papier);
2. tweedimensionale patronen die zijn opgebouwd uit een roosterwerk van gelijkzijdige driehoekjes;
3. tweedimensionale ster- en regelmatige veelhoek-patronen die zijn opgebouwd uit een radiaal roosterwerk;
4. driedimensionale ster- en regelmatige veelhoek-patronen voor koepels en overgangszones.
Hierbij valt aan te tekenen dat groep 3 geschikt is voor de vlakke meetkunde; de groepen 1 en 2 betreffen kalligrafiewerk en in groep 4 gaat het om driedimensionale figuren.
Necipoğlu's catalogus van de 114 tekeningen van de Topkapiboekrol (blz. 239-283) is een beschrijving per tekening volgens een vast concept, waarschijnlijk gebruikelijk in de kunstgeschiedenis:
Bovenaan geeft zij als illustratie een heel kleine versie van de tekening; daarin zijn cirkels, stralen en andere lijnen toegevoegd. Daaronder staan de gegevens over de desbetreffende tekening in vier onderdelen vermeld: beschrijving, afmetingen, conditie van de tekening en de techniek van construeren van de tekening. Bij het laatste onderdeel geeft Necipoğlu een beschrijving van de meetkundige patronen die ze in de tekening ziet. Ze voegt meetkundige elementen toe, zoals onderdelen van cirkels, stralen en andere hulplijnen. Ze gebruikt daarbij eenvoudige symmetrieën, wiskundige berekeningen ontbreken.

Deel 3 bestaat uit prachtige kleurenreproducties van de 114 tekeningen van de boekrol (blz. 285-347) op 50% van hun ware grootte zoals in de Topkapi boekrol. Necipoğlu geeft in haar boek de lijnen zwart en de stippellijnen rood weer, waarschijnlijk heeft zij dit letterlijk overgenomen uit de Topkapi boekrol.

de Topkapi boekrol vanuit een wiskundig en historisch perspectief

Mijn bestudering van de Topkapi boekrol is in tegenstelling tot die van Necipoğlu gedaan vanuit een wiskundig en historisch perspectief. Tijdens het werk kwam ik tot een zelfbedachte methode: mijn wiskundige analyse. Dit is een concreet meetkundige aanpak die alleen gebruik maakt van wiskunde die de mozaïekmakers bekend geweest moet zijn en niet van recentere wiskunde (groepentheorie e.d.) die in moderne beschrijvingen van mozaïeken soms wordt gebruikt.
Overigens maakte ik een selectie in het aantal tekeningen vanwege de beschikbare tijd en met het oog op eventuele bruikbaarheid voor middelbare scholieren, met als belangrijke aspecten wiskunde zien in een andere cultuur en een raakvlak tussen wiskunde en kunstgeschiedenis. Uiteindelijk koos ik tien tekeningen uit die goed leesbaar zijn en aansluiten bij de wiskundige achtergrond van de doelgroep, vlakke meetkunde. Deze tekeningen zijn (volgens de nummering van Necipoğlu) tekening 50, 53, 54, 55, 57, 59, 61, 62, 63, 64. Ter illustratie staat hiernaast een afbeelding van tekening 53.

In mijn methode maak ik gebruik van drie lijnsoorten. Twee lijnsoorten zijn in de tien tekeningen aanwezig, dat zijn de stippellijnen en de zwarte lijnen. De derde lijnsoort is niet in de tekeningen aanwezig en noem ik hulplijnen. Mijn hulplijnen lijken enigszins op de lijnen die Necipoğlu in haar tekeningen heeft getrokken. Zij heeft een aantal rechte lijnen in de tekeningen getrokken, beschrijft vervolgens wat ze ziet en meet ogenschijnlijk vanuit een kunsthistorisch perspectief. Het aantal lijnen dat zij tekent is groter dan noodzakelijk is voor mijn centrale vraag: “Wat zijn de beslismomenten van de handwerkslieden geweest?” Of anders gesteld: “Wat zijn de keuzemogelijkheden in het patroon van stippellijnen en zwarte lijnen?” Mijn hulplijnen zijn een belangrijk onderdeel in dit proces. Verder zal ik het verband tussen hulplijnen, stippellijnen en zwarte lijnen aantonen, plus mijn ontdekking dat de hulplijnen de stippellijnen vastleggen en dat de hulplijnen en stippellijnen samen de zwarte lijnen vastleggen. Deze aspecten komen niet voor in het werk van Necipoğlu.
Voorafgaande aan mijn wiskundige analyse heb ik in mijn scriptie meerdere voorbeelden en aspecten belicht om een wiskundige aan-



pak te rechtvaardigen. Hier zal ik mij beperken tot één voorbeeld.

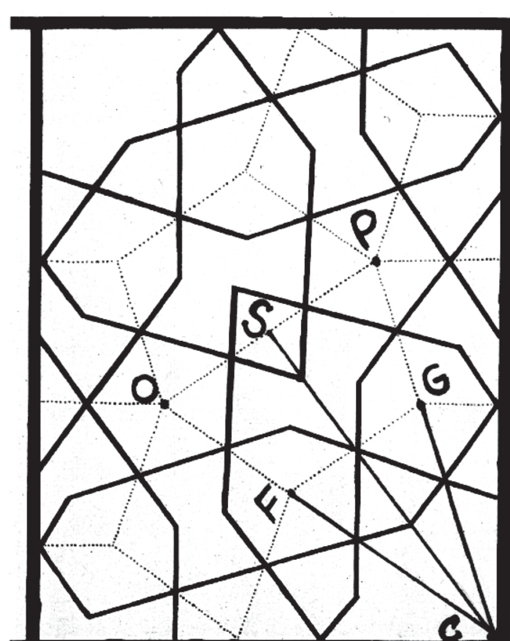
een wiskundig voorbeeld ter ondersteuning van een wiskundige aanpak

Voordat het voorbeeld uitgewerkt wordt introduceer ik eerst het begrip *ideale tekening*. Met de ideale tekening bedoel ik de "wiskundige ideale tekening" die de tekenaar vermoedelijk in gedachten heeft gehad. Tijdens de reconstructie van de ideale tekeningen ontdekte ik dat het tekenen van één lijn met een gradenboog een afwijking veroorzaakt en dat wanneer je meerdere lijnen tekent de exactheid steeds meer geweld wordt aangedaan. Voor het oog zijn de tekeningen in de Topkapi boekrol een perfecte eenheid van symmetrische figuren, maar als we nameten dan kloppen de hoeken en lengtes van lijnstukken niet exact. Wanneer er een reconstructie wordt gemaakt van de tekeningen die wij aantreffen in de Topkapi boekrol, dan is dat een ideale tekening.

Necipoğlu schrijft op bladzijde 234 dat sommige stippellijnstukken in twee gelijke of drie gelijke delen verdeeld zijn door paren van zwarte lijnen, ook wel bisectie of trisectie van een lijnstuk genoemd. De uniformiteit voor de lengte van stippellijnstukken is, denk ik, bewust gemaakt door de mozaïekmakers, ter vervolmaking van het kunstwerk. Tekening 53 staat hiernaast afgebeeld met de (door mij ingevoerde) letternotatie CFOSGP. In deze afbeelding kunnen we zien dat er bisectie en trisectie is toegepast op de stippellijnen die onderdeel zijn van meetkundige figuren (trapezia en ruiten) door paren van zwarte lijnen. Zijn alle stippellijnstukjes in de ideale tekening 53 even lang? Om deze vraag te kunnen beantwoorden maak ik gebruik van wiskundige berekeningen en haal ik een driehoek uit de tekening naar voren (zie driehoek COP in de afbeelding). De lengte van lijnstuk CF geef ik aan met CF en ook met FC.

In tekening 53 liggen twee gestippelde trapezia tegen elkaar aan en vormen zo een halfregelmatige zeshoek (aangetoond in de scriptie); en het middelpunt van deze zeshoek is het middelpunt van de tekening. Op drie zijden van trapezium FGOP is bisectie toegepast en op één zijde is trisectie toegepast door paren van zwarte lijnen.

De lengte van zijde FG en van de zijden OF en GP noem ik 2x en de lengte van OP noem ik 3y. Als alle stippellijnstukjes even lang zijn, dan moet er gelden y=x.
De lengte van CF en CG noem ik r.



De volgende gegevens leid ik af uit tekening 53.

* Driehoeken CFG en COP zijn gelijkbenig en tophoek OCP is 36 graden.
* In gelijkbenige driehoek COP is CS zwaartelijn, hoogtelijn en bissectrice.
* Vervolgens geldt:

$$\sin 18^\circ = \frac{\frac{1}{2}FG}{CF} = \frac{x}{r} \text{ ofwel } x = r.\sin 18^\circ$$

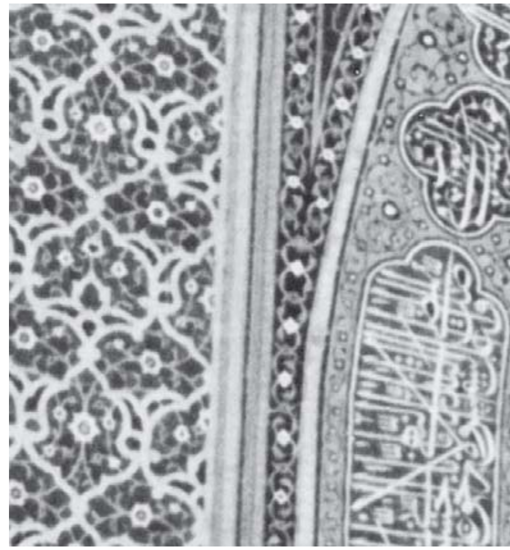
* $CP=CG+GP=r+2x=r+2r.\sin 18^\circ=r(1+2\sin 18^\circ)$
* OP:FG=CP:CG (want driehoeken COP en CFG zijn gelijkvormig.

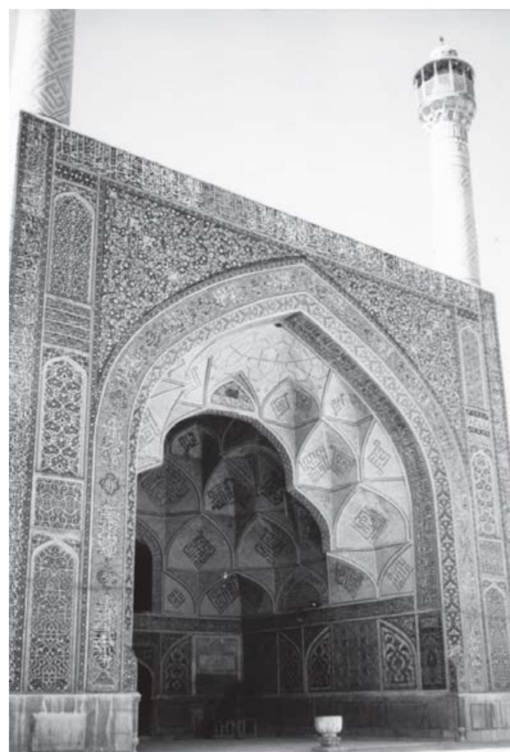
Als inderdaad alle stippellijnstukjes even lang zijn, dan moet er gelden y=x, hetgeen betekent dat OP:FG=3:2.
Maar dan geldt $3:2=(1+2\sin 18^\circ)$ dus moet er gelden: $2(1+2\sin 18^\circ)=3$ ofwel $\sin 18^\circ=\frac{1}{4}$. Tegenspraak, want $\sin 18^\circ= \frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}$

Conclusie: $y \neq x$, anders gezegd: in tekening 53 zijn niet alle stippellijnstukjes even lang, alhoewel dit wel zo lijkt wanneer je naar de tekening kijkt. Necipoğlu heeft dit overigens niet opgemerkt.

de wiskundekennis van de mozaïekmakers

In de Middeleeuwen zijn in de hele Islamitische wereld prachtige moskeeën gebouwd die vaak versierd zijn met mozaïeken. Mozaïeken dienden als vlakvulling en werden gebruikt op koepels en andere driedimensionale structuren. Behalve puur meetkundige vormen werden ook gestileerde plantenmotieven gebruikt zoals ranken en bloemen en soms godsdienstige teksten of gedichten. Zie bijvoorbeeld de hiernaast afgebeelde Vrijdagmoskee in Isfahan, Iran; met daarboven een uitvergroot gedeelte van de foto.



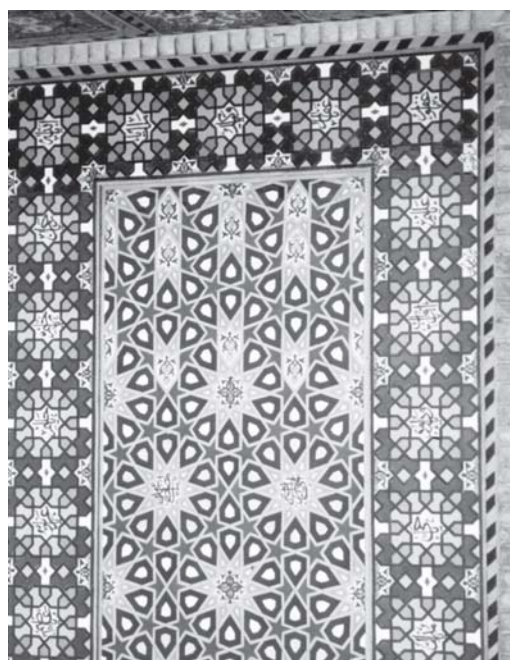


De ontwerpers en de makers van deze mozaïeken moeten een behoorlijke wiskundige kennis gehad hebben. De *Elementen* van Euclides waren in het Arabisch vertaald en overal bekend (Sezgin blz. 83-115); maar de mozaïekmakers hadden niet veel op met de manier van wiskunde bedrijven van Euclides, met axioma's, stellingen en bewijzen. Dat wil niet zeggen dat er geen theorievorming geweest is: geredeneerd werd er zeker! De meest concrete resultaten uit de *Elementen* moeten hen ook bekend zijn geweest. Hieronder zullen we een voorbeeld tegenkomen in de gulden snede.

Kennis van mozaïeken schijnt vooral mondeling van meester op leerling overgedragen te zijn. Pas zo'n 10 jaar geleden zijn enkele middeleeuwse documenten over mozaïeken ontdekt. Behalve de Topkapi boekrol zijn, in een Perzisch handschrift (Parijs, Bibliothèque Nationale, Ancien Fonds 169), circa 40 bladzijden tekeningen en mozaïeken gevonden met geschreven instructies. Dit handschrift is in het Russisch vertaald en ook in het Perzisch uitgegeven, een klein deel van de wiskunde hiervan is door prof Dr. J.P. Hogendijk voor het eerst beschreven in de *Nieuwe Wiskrant*, (jg 16 deel 2, dec. 1996). Volgens Hogendijk staan er drie soorten problemen in het Perzische handschrift. Er staan tekeningen en constructies in maar geen bewijzen. Het is een wiskunde van een heel ander type dan bij Euclides en in de meeste middeleeuwse islamitische teksten.

Een serie problemen heeft te maken met de regelmatige vijfhoek en is van belang voor het onderzoek. Veel Iraanse mozaïeken zijn gebaseerd op vijfhoeken en tienhoeken; zie bijvoorbeeld de afbeelding hiernaast: dit is een moderne versie van mozaïeken op de wand van een onbekende moskee in Isfahan.

Het handschrift geeft vier constructies van de vijfhoek met passer en liniaal. Het bijzondere volgens Hogendijk is dat de passer op een vaste opening wordt gezet. Het lijkt er op dat deze eis uit de praktijk is ontstaan, om onnauwkeurigheden in de constructie (door steeds opnieuw instellen van de passer) te beperken. Bij het tekenen van een heel patroon is dat uiteraard belangrijker dan bij één vijfhoek.
Een diagonaal in een regelmatige vijfhoek verdeelt de vijfhoek in een gelijkbenige driehoek met hoeken van 36°, 36°, 108° en een trapezium met hoeken van 72°, 72°, 108°, 108°. In het handschrift is er een constructie waarbij de diagonaal van de vijfhoek een hoek maakt met de zijde van de vijfhoek van 36°12'….



Deze constructie is dus niet exact, maar de fout zal in de praktijk niet opvallen. Euclides had wel een exacte constructie van de regelmatige vijfhoek gegeven, maar daarbij moest de passer (minstens) tweemaal worden ingesteld.

de gulden snede

De gulden snede is een mooie verdeling van een lijnstuk en als volgt gedefinieerd in moderne notatie:

Een lijnstuk met lengte a heet verdeeld volgens de gulden snede in twee delen (x en y) wanneer er geldt a:x=x:y.

Wanneer we a=1kiezen dan gelden de volgende twee relaties: $x^2=1.y$ en $x+y=1$. Substitueren van de eerste vergelijking in de tweede levert: $x+x^2=1$, oplossen met behulp van de abc-formule levert

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

De enige juiste oplossing is

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$$

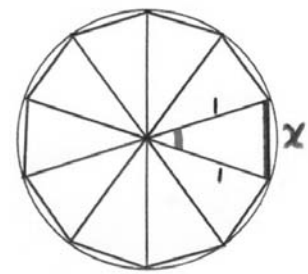
omdat de lengte van een lijnstuk positief is.

Deze definitie was bekend bij Euclides, in zijn *Elementen* boek 6, definitie 3 staat namelijk: "Men zegt dat een rechte in uiterste en middelste reden verdeeld is, wanneer zoals het geheel tot het grootste stuk, zo het grootste tot het kleinste staat." (Dijksterhuis blz. 16,17).

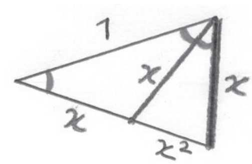
Volgens Dijksterhuis is de benaming *gulden snede* zoals men die tegenwoordig gebruikt voor de verdeling in uiterste en middelste reden niet van klassieke oorsprong. Deze benaming treedt pas in 1835 voor het eerst op (zie Dijksterhuis blz. 17). Overigens komt de gulden snede voor in een tekening van de Topkapi boekrol, dit zal later aangetoond worden.

In de meetkunde komt de gulden snede voor in de volgende situatie:

Gegeven: een regelmatige tienhoek; de straal van de omgeschreven cirkel van deze tienhoek heeft lengte 1. Vraag: Wat is de lengte van de zijden van de regelmatige tienhoek?



Om deze vraag te beantwoorden neem ik een tiende deel van de regelmatige tienhoek apart. Dit is een gelijkbenige driehoek, met hoeken van 36°, 72°, 72°. De lengte van de gelijke benen is 1 en de lengte van de derde zijde noem ik x, dit is de lengte van de gevraagde zijde van de regelmatige tienhoek.



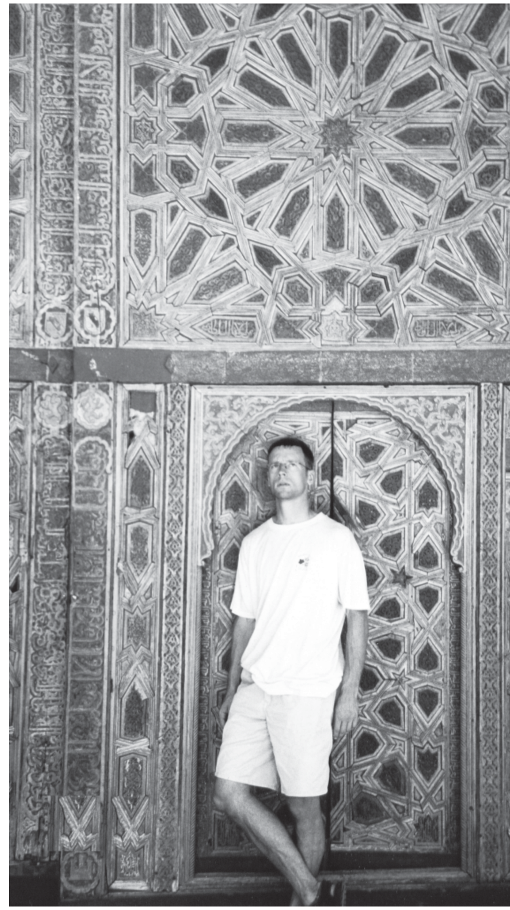
Vervolgens trek ik de bissectrice van één van de hoeken van 72°. Het gevolg hiervan is dat er drie gelijkbenige driehoeken zijn, de grootste en kleinste zijn gelijkvormig, immers de kleinste driehoek heeft hoeken van 36°, 72°, 72° en de lengtes van de zijden zijn x,x,1. De lengte van de straal van de omgeschreven cirkel van de tienhoek is nu uit te drukken in x, namelijk de lengte van de straal is gelijk aan een zijde x^2 en aan een zijde x. De vergelijking

die daarbij hoort luidt $x^2+x=1$. Deze vergelijking is hetzelfde als bij de gulden snede.
De constructie van deze gelijkbenige driehoek was in wezen al aan Euclides bekend, zie *Elementen* boek 4, stelling 10:
“Een gelijkbenige driehoek te construeren die elk van de hoeken aan de basis tweemaal zo groot heeft als de overblijvende.” (Dijksterhuis blz. 51,52).

slotopmerkingen

Mijn wiskundige analyse van de tien tekeningen van de Topkapiboekrol zal ik verder aan bod laten komen in een volgend artikel in Arthesis, dat voortbouwt op de voorbereidingen zoals beschreven in dit artikel.
Zo hoop ik dan verder met de lezer de schoonheid, regelmaat en wiskundige achtergrond van de be-treffende mozaïeken te delen.
De laatste foto illustreert hoe ik in elk geval onder de indruk ben van de prachtige mozaïeken van het Al-hambra in Zuid-Spanje.

Mattias Visser
wiskundeleraar
Minkema College te Woerden



Bronnen:

E.J. Dijksterhuis,
De Elementen van Euclides 2
Groningen: Noordhoff, 1930,
Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen deel 3.

J.P. Hogendijk,
Een workshop over Iraanse mozaïeken,
Nieuwe Wiskrant – jaargang 16 (1996) deel 2, pp. 38-42.

G. Necipoğlu, *The Topkapi Scroll – Geometry and Ornament in Islamic Architecture,*
Santa Monica: Getty Publishers, 1995.

A. Özdural, *Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World*
Historia Mathematica 27 (2000), pp. 171-201.

F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums,*
Band V: Mathematik bis ca. 430 H., Leiden: Brill, 1974.

vooruitzicht op een dag vol beweging

De ***Ars et Mathesisdag*** vindt dit jaar plaats op ***29 oktober*** (dus *niet* als meestal in november). Het thema van de dag zal zijn 'beweging', naar aanleiding van het werk van ***Ron Resch***.
Over hem is weinig te vinden op het Internet. Ik kwam het werk van deze Amerikaanse ontwerper tegen op het Bridges Congres in 2004 in de vorm van een video. Hierop was te zien hoe hij vanuit allerlei vouwstructuren bewegende constructies ontwikkelde. Regelmatige vlakverdelingen en regelmatige veelvlakken vormen het basismateriaal voor zijn ontwerpen. Ook dit jaar kwam zijn werk weer naar voren op het Bridges Congres. Robert McDermont vertelde over zijn samenwerking met Ron Resch tijdens het Ukrainian Easter Egg project, de bouw van een giantisch ei-vormig monument bestaande uit driehoeken, zo'n dertig jaar geleden. Het probleem was om een ei-vorm zo goed mogelijk te bedekken met min of meer gelijkzijdige driehoeken. Het resultaat is nu nog steeds te zien in de vorm van een meters hoog monument in Alberta, Canada.
Van McDermont hoorde ik dat Ron Resch enige tijd terug een ernstig auto ongeluk had gehad, waardoor hij niet meer in staat is te werken. Op de Ars et Mathesisdag zal de video worden getoond om het zeer bijzondere werk van Ron Resch wat meer aandacht te geven.

Ars et Mathesisdag 2005
29 oktober in Het Brandpunt te Baarn
nadere gegevens t.z.t. in de convocatie

Zelf ben ik ook al enige tijd bezig met het onderzoeken van dynamische mogelijkheden van structuren. Mijn uit palen opgebouwde koepelconstructies zijn gebaseerd op een bepaalde categorie patronen die ik Leonardo-grids heb genoemd. Deze grids heb ik behalve voor koepels ook kunnen gebruiken voor zogenaamde space frame constructies. En deze bleken dynamische eigenschappen te bezitten. Ook in 2D zijn deze grids om te zetten tot bewegende patronen. Deze "scharnierende betegelingen" wil ik in de vorm van animaties laten zien.
In een project op de Universiteit Twente is een samenwerking tot stand gekomen tussen mij en de componist ***Peter Leutcher***. Hij is tevens docent muziek technologie aan het conservatorium in Enschede. Peter Leutcher zag mogelijkheden om de wiskundige patronen waar ik mee werk te gebruiken als uitgangspunt voor

een compositie. De ontwikkeling naar de uiteindelijke compositie laat hij zien en horen in zijn presentatie. En natuurlijk laat hij ook de compositie horen.
Een andere vorm van beweging komt aan de orde bij een demonstratie van een computer programma gemaakt door ***George Hart***. Hart, bekend als wiskundig kunstenaar, heeft een programma geschreven waarmee hij "Orderly Tangles" kan ontwerpen. Orderly Tangles, uitgebreid beschreven door Alan Holden, zijn constructies van in elkaar hakende regelmatige veelhoeken die gebaseerd zijn op de regelmatige veelvlakken. Wij kennen deze constructies voornamelijk van de hand van Koos Verhoeff. Behalve de eenvoudige constructie met vier vervlochten driehoeken heeft Koos Verhoeff ons diverse veel ingewikkelder constructies laten zien. Met het programma van George Hart is nu op interactieve wijze te bepalen hoe vanuit bijvoorbeeld een dodecaeder een set van twaalf in elkaar hakende vijfhoeken kan worden bepaald. Het programma zal gratis beschikbaar zijn voor de deelnemers aan de dag.
Op het afgelopen Bridges Congres (augustus 2005, Banff, Canada) heb ik de nieuwste versie van de presentatie over het "Gat van Escher" door ***Bart de Smit*** mogen zien. Deze presentatie werd door velen gezien als een van de hoogtepunten van het congres. Reden genoeg om Bart de Smit uit te nodigen voor onze dag. De presentatie zit vol met animaties en geeft helder weer hoe het probleem van het gat in de Prentententoonstelling van Escher is opgelost.
Het programma voor de 29e oktober staat nog niet geheel vast, dus t.a.v. al het bovenstaande geldt: ***wijzigingen voorbehouden***.

Rinus Roelofs

goddelijke wiskunde

Op 1 juni j.l. werd aan de Vrij Universiteit Amsterdam het minisymposium *"Mathematics and the Divine"* gehouden. Voor zo'n 50 toehoorders gaven enkele deskundigen een inleiding, waaronder Albert van der Schoot met *"De vergoddelijkte proportie"*. Aanleiding tot dit minisymposium was het verschijnen van het boek *"Mathematics and the Divine, a historical approach",* waarvan het eerste exemplaar werd aangeboden aan de rector van de VU. Het boek bevat 35 artikelen van even zoveel auteurs.
Voor informatie over dit boek zie de website: *www.elsevier.com/locate/isbn/04444503285.*

weer eens een logo

Weer eens een logo van arthetische signatuur, in vervolg op de Vaart-serie in eerdere nummers. Nieuwe inzendingen blijven welkom!

Aannemingsbedrijf
De Boom B.V.

betalingsherinnering

Een verzoek aan wie dat nog niet deed om de ***donateurs-bijdrage voor 2005*** te voldoen (plus die ***voor 2004,*** als die ook nog niet is betaald). Zie voor de wijze van betalen verder het informatiekader op pag. 19. Graag eigen naam en adres duidelijk vermelden, plus het jaar/de jaren waarvoor wordt betaald (2004 en/of 2005).

De Stichting ARS ET MATHESIS (opgericht in 1983) heeft tot doel de belangstelling te bevorderen voor kunst die zijn inspiratie vindt in de wiskunde. Dit gebeurt onder meer door tentoonstellingen, publicatie van boeken en artikelen, het uitgeven van het blad 'ARTHESIS' en het organiseren van een jaarlijkse ARS ET MATHESISdag (diverse voordrachten gecombineerd met een dag-expositie waar werk van velerlei exposanten is te bekijken).

donateurs: Donateurs (minimum donatie € 15,- per jaar) ontvangen Arthesis en hebben gratis of tegen gereduceerd tarief toegang tot de jaarlijkse Ars et Mathesisdag. Bijdragen kunnen worden overgemaakt op bankrekening nummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn; s.v.p. met duidelijke vermelding van eigen naam en adres, en van 'Ars et Mathesis'.

secretariaat: A. Goddijn; ws. Nejo, Dijksgracht 18, 1019 BT, Amsterdam
email: A.Goddijn@fi.uu.nl

aanmelding als donateur, adreswijzigingen, bestellingen:
Ineke Lambers; Noorderkroon 77, 9301 JW Roden
tel. 050-3601301; email: ilambers@wxs.nl.

email: info@arsetmathesis.nl

website: http://www.arsetmathesis.nl

Ars et Mathesisproducten

verkrijgbaar: Sangaku-kwartet [sk], Sangaku-poster A3 of A4 [sp], Sangaku-leliekaart [slk], Sangaku-lelieposter A3 of A4 [slp]: nederlands of engels [n of e]; Spidron-kwartet [ek]; Orosz-kwartet [ok]; kwartet "orde-chaos" Monika Buch [bk]; A&M poster A3 of A4 [amp]; A&M knoop-kaart [amkk]; A&M letterkaarten [amlk]; A&M jubleumkaart 1998 (''luchtkubus") [amjk]; A&M jubileumposter A3 of A4 [amjp]; losse nummers Arthesis vanaf jaargang 14 [art/jaargang/nr]; set van 2 verzamelposters 'A&M-kunst' op hoogglanspapier A3 of A4 [vp].

prijzen: kaarten (set van 4) € 5, poster A4 € 2,50, poster A3 € 6, nummers Arthesis € 3,50; voor toezending A3 posters plus € 2,50, overig plus € 1,20; set van 2 posters vp: A3 € 14/toezending € 5, A4 € 8/toezending € 2.

bestelwijze: door overmaken van het totaalbedrag op gironr 1315269 t.n.v. J.J. Lambers-Hacquebard, na bericht per post of email aan Ineke Lambers (adres zie boven) onder vermelding van 'AM-bestelling', en opgave van gewenste aantallen en soorten producten en het adres waar de bestelling naar toe moet worden gezonden. Gebruik s.v.p. de hierboven tussen [ ] vermelde codes.

bestelwijze catalogus "Bomen van Pythagoras": zie Arthesis 2004 nr 1, pag. 18