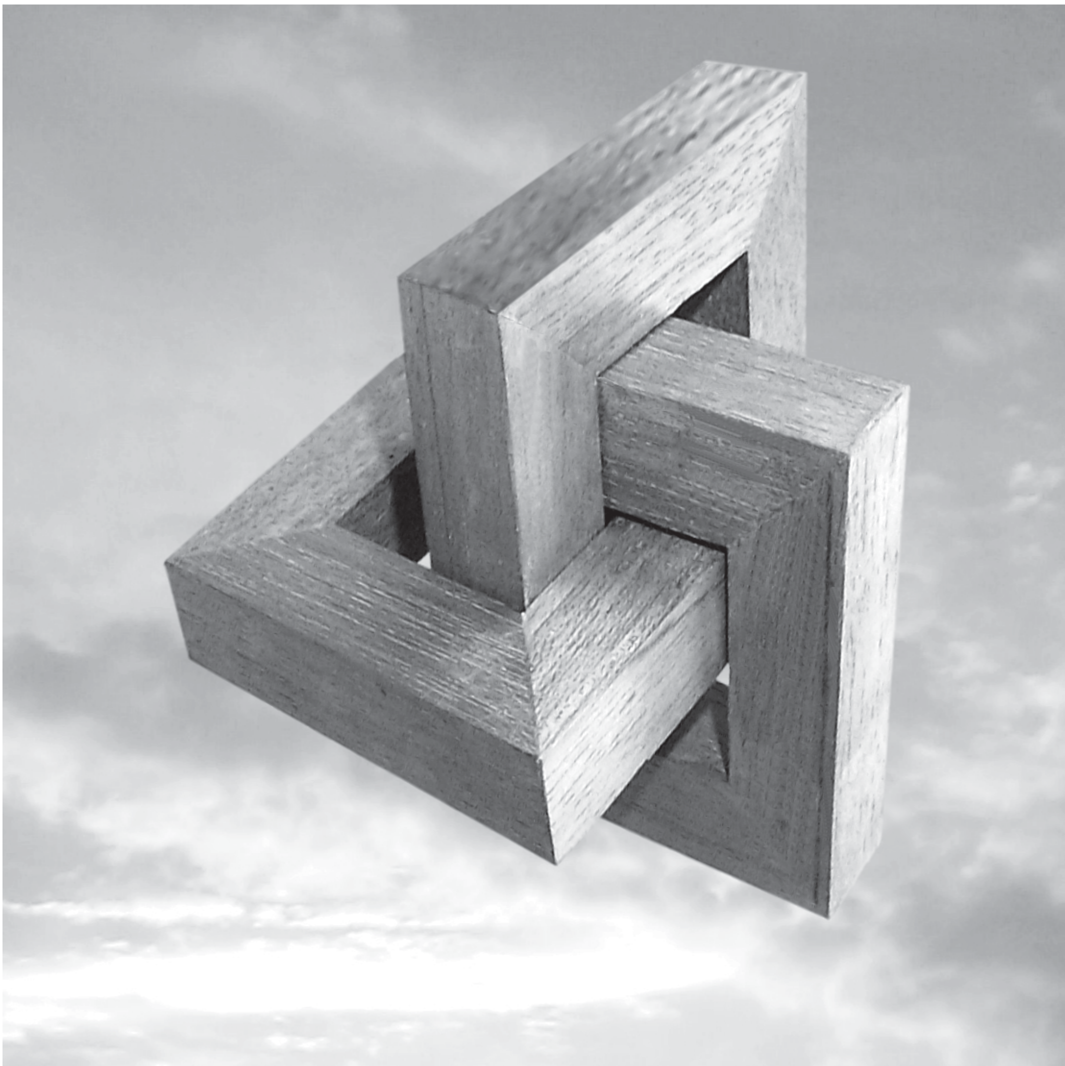
ARTHESIS

jaargang 18, nummer 2



een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis

inhoud

ARTHESIS

jaargang 18 nummer 2 - augustus 2004

Arthesis is een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis en wordt gratis toegezonden aan de donateurs van de Stichting. Losse nummers: € 3,50 (bestelwijze: zie kader op pag. 19).

omslag knoop Koos Verhoeff, montage Ineke Lambers

redactie Bart Heukelom
Rinus Roelofs
Ineke Lambers (vormgeving)

redactie-adres Bart Heukelom
Alexanderstraat 18
4191 GB Geldermalsen
email: b.heukelom@wxs.nl

inzenden kopij
Bij voorkeur in digitale vorm: tekst als WP- of Word-bestand; illustraties in de vorm van een goede foto of duidelijke tekening (indien mogelijk het origineel, liever geen scan of fotokopie), of digitaal aangemaakt (vectortekening in CDR of AI format; bitmaps als JPG of Tiff bestand en in voldoende hoge resolutie).

in het spoor van Escher naar Rome

regelmatige vlakverdelingen in Cosmatenwerk

inleiding

Wanneer je in Rome loopt word je overweldigd door de gebouwen, die allemaal omhoog lijken te wijzen. De toevallige toerist wordt daar als vanzelfsprekend op gewezen door de rondleidende gids. Zijn blik zal slechts naar beneden zijn gericht om oneffenheden in de vloer te ontwijken en over de ingesleten karrensporen van de Via Sacra op het Forum Romanum te stappen. Toch is dit niet de enige reden om naar beneden te kijken. Wanneer je verscheidene kerken binnenkomt, dan valt je de veelheid van mozaïeken op en gaat er van de vloer een bijzondere aantrekkingskracht uit. Aangezien leerlingen in de tweede fase van het voortgezet onderwijs hun studie afronden met een eigen onderzoek zou dit een mooie uitdaging voor hen kunnen zijn. Twee van hen, Milja Fenger en Ellis van Etten, wilden graag een wiskundig onderzoek doen en waren meteen enthousiast. Grootste probleem was echter om in Rome te geraken, de school kon dit onmogelijk financieren. Gelukkig werd de Escher Foundation bereid gevonden om dit onderzoek te sponsoren. Hieronder een verkorte versie van hun onderzoeksverslag.

regelmatige patronen

Al eeuwen lang gebruiken mensen versieringen en decoraties. In Rome is veel mozaïekwerk te vinden waarin regelmatige patronen een belangrijke rol spelen. Een bepaalde groep kunstenaars, de zogenaamde Cosmaten, heeft deze mozaïeken gelegd. We hebben onderzocht of alle 17 spiegelsystemen die er bestaan te vinden zijn in de mozaïeken van de Cosmaten. We wilden voor ons profielwerkstuk allebei graag iets doen met wiskunde (de regelmatige vlakverdeling) maar ook iets met kunst (de mozaïeken). Daarom hebben we voor dit onderwerp gekozen. Wij zijn naar Rome gegaan om de mozaïeken van de Cosmaten te bekijken en daarin de 17 symmetriegroepen te zoeken.

de Cosmaten

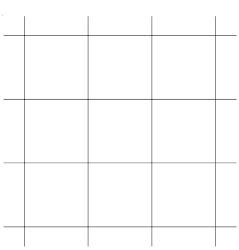
Het woord Cosmati (of Cosmaten) wordt meestal gebruikt als verzamelnaam voor mozaïeken die gemaakt zijn in Rome in de 12^{e} of 13^{e}

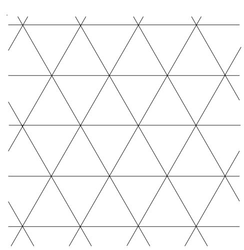
eeuw. De naam komt van de familie Cosmati die deze mozaïeken maakte. Het was een groep kunstenaars die bestond uit leden van vijf families uit Rome. (De naam is waarschijnlijk afgeleid van de marmerbewerker Laurentius Cosmas die in de 11^{e} eeuw vanuit Byzantium naar Rome kwam.) Drie van die artiesten, Luca (1221-1240) en Deodatus (1225-1294) en Johannes (1231-1303), waren erg bekend, maar

omdat zij vaak in grote groepen werkten ondertekenden zij met de naam Cosmati.
Hun werken zijn overal in Italië te vinden, van Sicilië tot de Arno, maar voornamelijk in Rome. In 1066 begonnen de Cosmati met het slopen van mozaïeken uit oude Romeinse gebouwen en gingen deze verhandelen in een groot deel van Italië. Het was dus eerst eigenlijk een groep handelaren. Later gingen ze de mozaïeken namaken. Ook werden ze geïnspireerd door de vloeren in de Montecassino basiliek.
De eerste kerk waarin een volledige Cosmatenvloer is gemaakt, is de Santa Maria de Cosmedin.

soorten regelmatige vlakverdeling

De honingraat van bijen bestaat uit een zeshoekje dat steeds wordt herhaald, doordat die zeshoek steeds een stukje wordt verschoven.
Zo kun je ook met gelijkzijdige driehoekjes en vierkantjes regelmatige patronen maken, door ze aan elkaar te leggen. Ze sluiten dan mooi aan, je zou oneindig hiermee door kunnen gaan. Bij de driehoekjes komen er zes punten bij elkaar en bij vierkanten vier punten.
Maar niet met alle figuren kun je een regelmatige vlakverdeling maken: van bijvoorbeeld regelmatige vijfhoeken kun je geen regelmatig patroon maken omdat je ruimte overhoudt.





formule voor vlakverdeling

Je kunt alleen een gelijkzijdige driehoek, vierkant en zeshoek gebruiken. Om dit te bewijzen kun je een formule gebruiken:
We noemen het aantal hoeken van de basisfiguur P en het aantal hoeken dat samenkomt noemen we Q. Dan krijg je de volgende formule:

$$360^\circ = (180^\circ - 360^\circ/Q)\ P$$

Is Q een geheel getal, dan is een volledige vlakvulling mogelijk.
Hiermee kun je de volgende tabel maken:

P	Q
3	6
4	4
5	$3\frac{1}{3}$
6	3
7	2,8
8	$2\frac{1}{3}$
9	2,57

(Je kunt voor P ook 1 en 2 kiezen, maar daar gaan we verder niet op in).

Met de formule kun je bewijzen dat er bij een vlakverdeling van gelijkzijdige driehoeken zes driehoeken samenkomen. Want:

$$(180^\circ - 360^\circ/3)\ 6 = 360^\circ$$

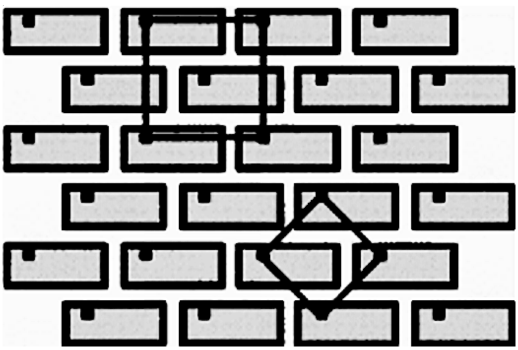
Zo kun je ook bewijzen dat een regelmatig patroon met regelmatige vijfhoeken niet mogelijk is. Want:

$$(180^\circ - 360^\circ/5)\ 3\tfrac{1}{3} = 360^\circ$$

$3\frac{1}{3}$ is geen geheel getal, dus met vijfhoeken lukt het niet.

verschillen tussen de symmetriegroepen

Met geometrische vormen, maar ook met grillige vormen, kan je regelmatige vlakverdelingen maken. Als je wilt bekijken wat voor een regelmaat er in een patroon zit, dan moet je eerst weten hoe het is opgebouwd. Eerst deel je het patroon in een rooster in, door steeds een zelfde punt van de herhaalde figuur te nemen en daar lijnen door te trekken. Dan krijg je een translatierooster.



Eén vakje in het rooster is een eenheidscel. In de figuur hierboven zijn twee eenheidscellen in het patroon getekend. De bovenste is een cel waarin een extra roosterpunt voorkomt. Omdat de zijden van de eenheidscel in dat geval loodrecht op en evenwijdig aan de spiegellijnen staan moet je voor deze cel kiezen. Een dergelijke cel noemen we ***gecenterd***. Er zijn twee groepen patronen die gecenterd zijn: **CM** en **CMM**. Eenheidscellen zoals de onderste zonder extra roosterpunt binnen de cel heten ***primitief***, die krijgen de letter **P**.

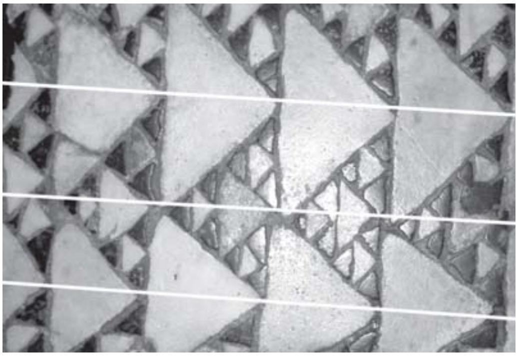
Er zijn verschillende manieren waarop een motief zich kan herhalen.
De vier verschillende soorten zijn:
Spiegeling: bij spiegeling wordt een figuur ten opzichte van een lijn gespiegeld. Je kunt de figuur als het ware dubbelklappen. De lijn waarin je spiegelt heet de spiegellijn. De groepen waarbij dit gebeurt hebben een **M** in de naam. Twee spiegellijnen die loodrecht op elkaar staan, geven **MM.**

Translatie: als je de figuur niet draait of spiegelt maar slechts verschuift, dan is er sprake van een translatie.
Rotatie: je draait de figuur ten opzichte van een punt. Het aantal draaiingen dat moet worden uitgevoerd om de oorspronkelijke figuur weer terug te krijgen geeft aan of er sprake is van een 2-tallig, 3-tallig, 4-tallig of 6-tallig draaipunt. Als je een figuur twee keer 180 ° draait om een punt, krijg je weer de oorspronkelijke figuur. Hier is dus sprake van een 2-tallig draaipunt. De nummers in de naamgeving vertellen welke draaipunten er in het patroon zitten.
Glijspiegeling: bij glijspiegeling wordt de figuur eerst gespiegeld en daarna een stukje verschoven evenwijdig aan de spiegellijn. Wij geven glijspiegeling aan met de letter **G.**

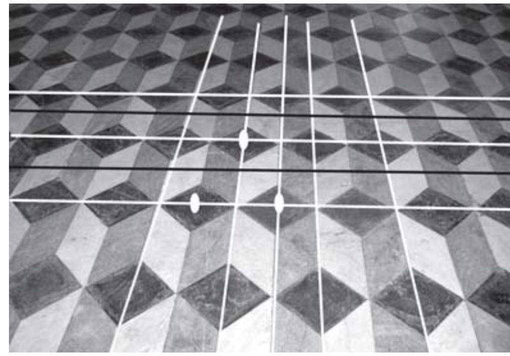
Je kunt in een figuur dus meerdere soorten regelmaat vinden. Je kunt in een figuur bijvoorbeeld een spiegeling en een draaiing vinden. Als je alle mogelijke combinaties maakt, kom je uiteindelijk uit op 17 groepen.

Hierna volgen enkele voorbeelden van de groepen, met een foto en de naamgeving. In de figuren zijn enkele bewerkingen aangegeven. Een spiegellijn is met een witte lijn aangegeven, een 2-tallig draaipunt met een witte ovaal, een 4-tallig draaipunt met een wit vierkantje, een 3-tallig draaipunt met een wit driehoekje, een 6-tallig draaipunt met een witte stip en een glijspiegellijn met een zwarte lijn.
(Aangepast aan zwart-wit weergave - Red.).

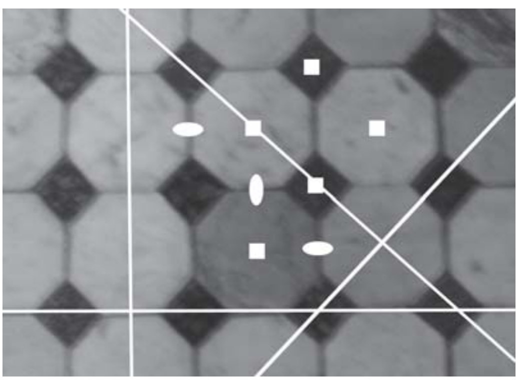
In ons werkstuk zijn alle groepen beschreven, hier zijn degene afgebeeld die we in Rome hebben gevonden:



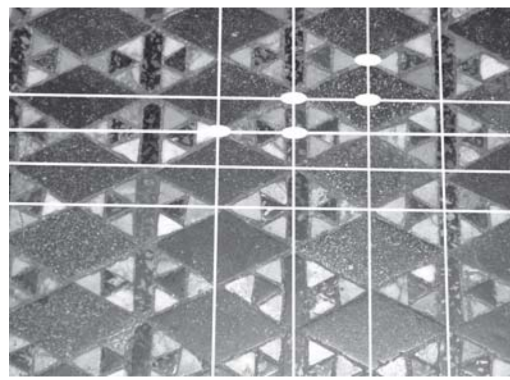
PM (spiegellijn)
Sint Jan van Lateranen



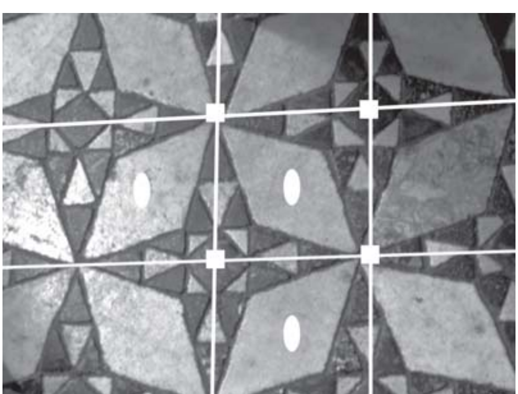
PMG (spiegellijn en glijspiegellijn loodrecht)
Sint Jan van Lateranen



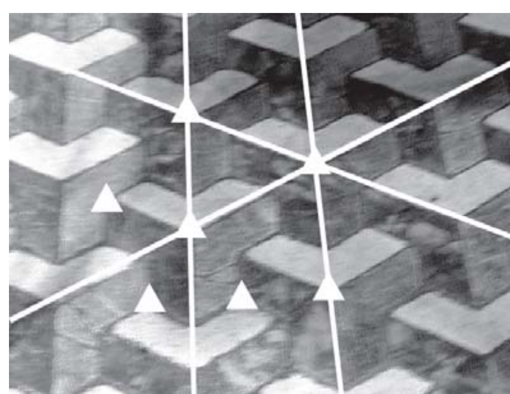
P4M (2-tallige en 4-tallige draaipunten op spiegellijn)
San Clemente



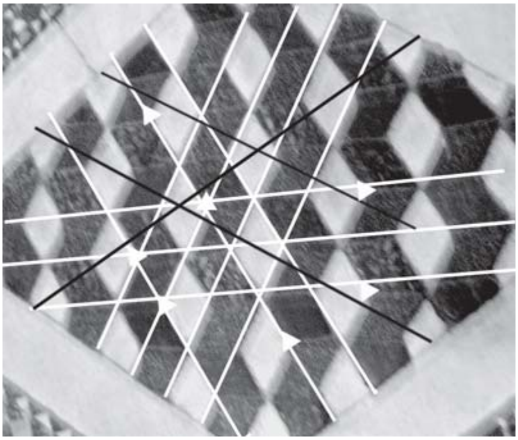
PMM (twee loodrecht op elkaar staande spiegellijnen)
San Clemente



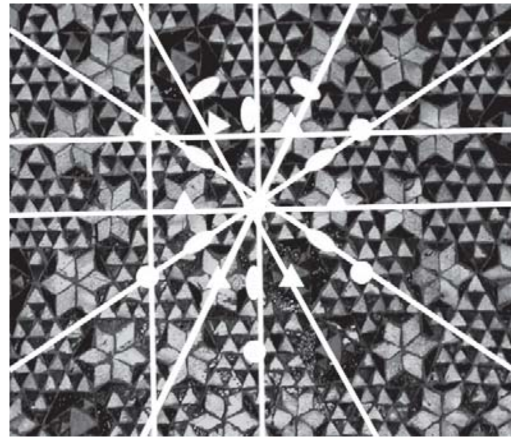
P4G (2-tallige en 4-tallige draaipunten niet op de glijspiegellijn)
Sint Jan van Lateranen



P3M1 (3-tallige draaipunten op de 3 verschillende glijspiegellijnen)
San Clemente



P31M (3-tallige draaipunten die niet op de drie verschillende spiegellijnen liggen) Sint Jan van Lateranen



P6M (6-tallige, 3-tallige en 2-tallige draaipunten en zes spiegellijnen) Sint Jan van Lateranen

resultaat

In de zestien kerken waar we geweest zijn en waarvan we wisten dat er Cosmatenwerk te vinden was, werden we overdonderd door de grote hoeveelheid mozaïeken.

We dachten dat we alle 17 groepen met gemak zouden kunnen vinden. Toen we later echter de honderden foto's onderzochten kwamen we tot de ontdekking dat de Cosmaten alleen geometrische vormen gebruikten als basis. De symmetriegroepen die we het meest hebben gezien zijn PMM en P4G. Bij die twee groepen worden voornamelijk grote vierkanten (met daartussen kleinere inwendig spiegelbare vormpjes) gebruikt.

Wij denken dat dit komt doordat de Cosmati voornamelijk werkten met geometrische vormen als bouwstenen voor hun patronen, waarschijnlijk omdat dat minder lastig is dan het werken met grillige vormen. Vierkanten, driehoeken en ruiten zijn te spiegelen in zichzelf. Daardoor zijn overal in de mozaïeken spiegellijnen te vinden. In groepen als P1, P2, P3 en P4 zitten slechts draaipunten en verschuivingen, geen spiegellijnen. Om dat te bereiken moeten de motieven grillig zijn. Ook bij PGG en PG zijn grillige vormen noodzakelijk. CM en CMM bezitten beide een motief dat één keer in zichzelf gespiegeld (CMM) of gedraaid (CM) is voordat ze samen gespiegeld worden in een spiegellijn. Ook dit hebben we in Rome niet gevonden. Aangezien er in 9 van de 17 groepen geen spiegellijnen voorkomen, hebben we er 8 van de 17 kunnen vinden. Maar 8 groepen zijn genoeg om prachtige figuren te maken.

Het resultaat verbaasde ons nogal en we zijn dan ook met een aantal vragen blijven zitten. Zoals bijvoorbeeld: waren de Cosmaten zich bewust van de 17 symmetriegroepen?

een geweldige ervaring

Wanneer je de Sint Jan van Lateranen binnenkomt, staat het vol met toeristen die naar het mooie plafond staan te kijken. Maar als je naar de vloeren kijkt, zal je versteld staan van de vele prachtige mozaïeken.

overzicht van de vloer in Sint Jan van Lateranen

Het werk van de Cosmati is te bekijken op twee manieren. Als je de kleinst mogelijke vormpjes bekijkt, wat wij hebben gedaan voor ons onderzoek, vind je alleen geometrische vormen. Als je het van een afstandje bekijkt zie je grote, vaak asymmetrische, figuren. In deze figuren zijn de patronen die wij hebben onderzocht als opvulling voor vlakken gebruikt.

Wij vonden het Cosmatenwerk erg mooi en we hebben ons werkstuk dan ook met veel plezier gemaakt. We hebben erg veel werk gehad aan het sorteren van de honderden foto's (bijna 700!) die we hebben gemaakt. Toen we aan het sorteren waren, zagen we dat we vaak dezelfde patronen hadden gefotografeerd. Het herkennen van de groepen werd ook steeds iets makkelijker naarmate we langer met het sorteren bezig waren.

Ellis fotografeert een mozaïek,
terwijl iemand anders een baldakijn fotografeert

We hebben echt een geweldige tijd gehad in Rome. Naarmate we meer van de Cosmati begonnen te begrijpen door ons werk in Rome, raakten wij steeds meer gefascineerd door de wonderlijke figuren in de mozaïeken. Bij elke toevallige ontdekking werd ons enthousiasme groter. Dankzij de Escher Foundation hebben wij dit profielwerkstuk met veel plezier kunnen maken! Het was een geweldige ervaring.

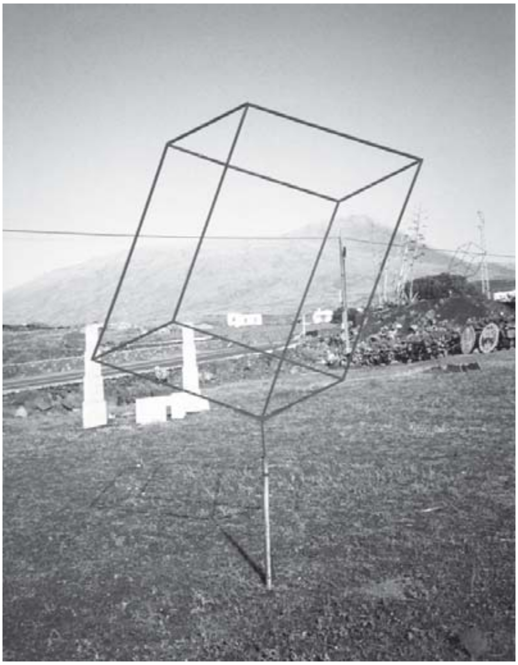
Milja Fenger en Ellis van Etten
(leerlingen Lyceum Sancta Maria te Haarlem)

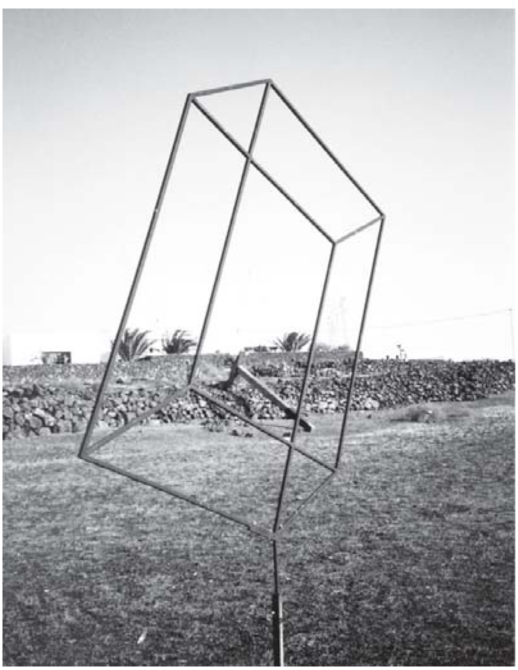
bronnen

Spiegelkunstenaar - Hans Kuiper, Domus 1996
De toverspiegel van M.C. Escher - Bruno Ernst, Benedikt Taschen Verlag 1994
Groups and Symmetry - M.A. Armstrong
Farbige Parkette - W Borho e.a., Birkhäuser Verlag1988
Geometric Concepts in Islamic Art - Ayse Parman World of Islam Festival pb Ltd. 1976
I Cosmati - Luca Creti, Edilazio , 2002

websites

http://xraywww.chem.uva.nl/xray/cursus/p1.html
www.aarde.nu
www.marblesart.com/ted/realizzazioni.htm
www.mcescher.nl





verrassing op Lanzarote

Tijdens onze vakantie in maart 2004 op het eiland Lanzarote werden we in Las Breñas, een kunstenaarsdorp in het zuiden, verrast door de hier afgebeelde “optische illusies”. De schijnbaar ruimtelijke constructies zijn echt vlakke figuren met afmetingen van enkele meters, van betonstaal aan elkaar gelast. De kunstenaar hebben we niet opgespoord, wie weet bij een volgend bezoek aan dit mooie eiland in de zon.

Henk van Tongeren

betalingsherinnering

Wederom het verzoek aan wie dat nog niet deed om de ***donateurs-bijdrage voor 2004*** te voldoen (plus Uw ***donatie voor 2003,*** mocht U die nog niet hebben betaald). Zie voor de wijze van betalen het kader op pag. 19. Gaarne eigen naam en adres duidelijk vermelden, plus het jaar/de jaren waarvoor U betaalt (2003 en/of 2004).

cirkels en sterren in een goddelijke komedie

deel 4: naar de bovenredelijkheid van de 10e hemel

wat voorafging

In de vorige aflevering van deze serie over de Divina Commedia van Dante lag veel nadruk op de allegorische betekenis van de omkeringen die de reiziger op de Louteringsberg vergezelden, in samenhang met de verassingen die het tegenvoeterschap bood op de Louteringsberg die op de aardbol tegenover Jeruzalem ligt.

Misschien is het meest wiskundige van de Divina Commedia juist dit: de veelstemmige verwevenheid van de verschillende lagen van de tekst: feiten, allegorieën, morele en religieuze duiding. De structuur is wat dit betreft complex, maar ook glashelder én steeds vragen en activiteit van de lezer oproepend. Kortom: de complexiteit van de structuur van het geheel, die merkwaardigerwijs de beginnende lezer helemaal niet hoeft te storen, geeft de ervaren lezer de indruk dat hij een tekst voor zich heeft die minstens de structurele rijkdom heeft van de Kunst Der Fuge van Bach. Die is ook niet *direct* mathematisch, in de zin van verwijzend naar specifieke mathematische structuren, maar *indirect*, in die zin dat de structuur het karakter van een rijk mathematisch spel heeft.

In deze laatste aflevering van het vierluik over de wiskunde in de Divina Commedia van Dante is de wiskunde veel onmiddellijker aanwezig. In het Paradiso helpt de wiskunde - vooral de meetkunde - de structuur en betekenis van de hemelse sferen begrijpen, maar aan het eind wordt juist met behulp van de wiskunde duidelijk gemaakt dat de Rede tekort schiet als het Goddelijke terrein van het Empyreum wordt betreden.

bijzondere momenten in de hogere sferen

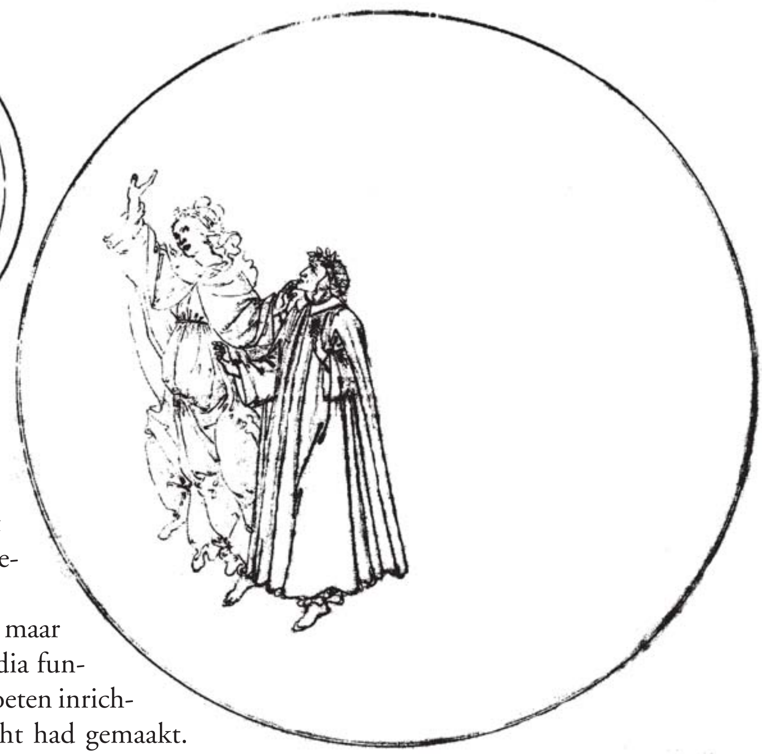
Wat de meetkundige beschrijvingen der verschijnselen betreft zijn beide wereldsystemen, het Ptolemaeïsche met zijn centrale aarde en het Copernicaanse met zon als centraal object, volkomen gelijkwaardig, beide beschrijven precies dezelfde zichtbare fenomenen. Dat wisten Ptolemaeus en Copernicus allebei. Systemen met een bewegende aarde waren name-

lijk de Grieken allang bekend, maar Ptolemaeus verwierp de beweging van de aarde zelf om fysische redenen.

Links onder op de vorige bladzijde is de tekening van Copernicus zelf afgebeeld uit het handschrift van *De Revolutionibus (1543)*, met de zon in het midden. De illustratie van Botticelli (onderaan op deze bladzijde) bevat het Ptolemaeïsche beeld en is een overzicht voor het hele Paradiso-gedeelte en staat bij Canto II van Paradiso. Botticelli tekent eerst de sferen van lucht en vuur om de aarde, dan de zeven planeten (met de zon op de vierde plaats). Op de twee-na buitenste is niet één planeet getekend, maar een hoeveelheid kleine sterretjes, juist nog zichtbaar in deze verkleining: de achtste sfeer van de vaste sterren, het Stellatum.

De centrale aarde van Ptolemaeus met de wentelende sferen van planeten en zon er om en om en om heen kon door Dante prachtig worden uitgebreid met Lucifer in het diepste punt en de uiterste hemelsfeer van het Goddelijke Empyreum er buiten omheen. Het Copernicaanse beeld liet zo'n constructie eenvoudig niet toe. Anders gezegd: de twee theorieën mogen dan wel geometrisch equivalent zijn, voor de andere betekenislagen van de tekst ligt dat anders.

Daar ligt ook de kern van de Copernicaanse revolutie; niet alles draaide meer om de aarde en de mens. De wereld van Copernicus had zijn eigen beweging, waarin de plaats van de mens ondergeschikter was dan voorheen werd gedacht.



Daarbuiten het Primum Mobile, dat de beweging vanuit het goddelijke doorgeeft aan de planeten, en daarbuiten het Empyreum, het goddelijke gebied zelf.

Dante heeft het niet geweten, maar hij zou zijn Divina Commedia fundamenteel anders hebben moeten inrichten als hij na 1543 zijn tocht had gemaakt.

Een overzicht van de zeven sferen der planeten krijgt Dante zelf als hij vanuit het Stellatum naar beneden kijkt. De bekende planeetnamen worden niet allemaal genoemd, maar wel de klassiek mythologische familierelaties:

Ik wendde dus door alle zeven sferen
mijn ogen om en zag ook deze bol
en moest bij die armzalige aanblik lachen.

Het lijkt me dat de beste keuze maakt
wie die gering acht: wie zich richt naar elders
betoont zich pas een ridder van de deugd.

Ik zag Latona's dochter lichten, zonder
die vlekken, die 'k als reden had gezien,
voorheen, om haar voor ijl én dicht te houden.

De aanblik van uw zoon, Hyperion,
doorstond ik daar, en dicht rondom hem zag ik,
Dione en Maia, ook uw kinderen gaan.

En – 't gulden midden tussen zoon en vader –
verscheen mij Jupiter; hier werd ik ook
gewaar hoe ieders standplaats steeds verandert.

Ze toonden alle zeven zich aan mij:
hoe groot ze zijn, hoe snel, hoe ver de huizen
waar zij verblijven, afstaan van elkaar.
[Par. XXII, 133-150]

In de Paradiso geeft Dante veel details over alle hemellichamen. Deze bol (135) is de onaanzienlijke aarde. De periode waarin werd aangenomen dat de aarde plat was, is niet zo lang geweest. Vroegchristelijke auteurs bestreden dit Griekse idee, omdat het een heidense oorsprong had, maar einde 7e eeuw mocht voor sommigen zoals Beda Venarabilis de aarde alweer bolvormig zijn. Beda heeft een eenvoudige plek in de Paradiso, zijn naam wordt zonder verdere ornamentatie genoemd in Par. X, 131.
Latona's dochter (139): de maangodin Diana. De vlekken op de maan zijn uitvoerig in Paradiso, Canto II besproken - zie ook de eerste aflevering.
Naarmate de sferen dichter bij de aarde liggen is de beweging trager, want de beweging werd in fases doorgegeven van sfeer naar sfeer van boven naar beneden. Dante noemde de sfeer van de maan, dus de sfeer het dichtst bij de aarde, de langzaamste, als Picarda daar aan het woord is:

Ik ben Picarda, zult u nog wel weten:
te midden van de zaligen hier geplaatst,
ben ik zelf ook in de traagste hemel zalig.
[Par. III, 49-51]

Maar de maan gaat toch het snelst van alle hemellichamen om de aarde?
Nee! De dagelijkse gang van maan, planeten, zon en sterren is van oost naar west. Maan, planeten en zon lopen daarbij in hun eigen tempo achter op de sterren en de maan nog het meest, dat is van dag tot dag te zien. Omdat in het Ptolemaeïsche model alle draaiingen vanuit de vaste aarde worden bekeken, is de sfeer van de maan daarom de traagste.
Hyperion's zoon (142): Helios, de zon. De kinderen van Dione en Maia (144): Mercurius en Venus. Dante lijkt te zeggen (*move circa e vicino)* dat deze twee om de zon bewegen, echt duidelijk is het niet. Natuurlijk was het alle sterrenkundigen opgevallen dat deze twee planeten altijd dicht bij de zon stonden.
Bij aankomst in de derde sfeer, die van Venus, gebruikte Dante het woord epicykel:

Gevaarlijk bijgeloof schreef liefdesgekte
aan Venus toe, háár schijnsel zou
zich wentelen in die derde epicykel.
[Par. VIII, 1-3)]

De epicykel is de cirkel die door een planetaire sfeer wordt meegenomen en waarop de planeet zelf een extra beweging uitvoert. Deze combinatie was een kernpunt van de Ptolemaeische sterrenkunde en verklaarde de dwaalgang van de planeten, die ten opzichte van de sfeer der vaste sterren een heen en weer gaande beweging maken.
Op het moment waarop de middelste sfeer der planeten, die van de zon, verlaten wordt, klinkt dit fraaie beeld over de concentrische cirkels van de kosmos:

Van 't midden naar de rand of vice versa
beweegt in een kom het water, naar gelang
de omtrek of het middelpunt berooerd wordt.
[Par. XIV, 1-3]

Jupiter (146) staat tussen zijn zoon en zijn vader in: tussen Mars en Saturnus. De veranderende standplaats kan eventueel weer als een verwijzing naar de epicykel-theorie worden opgevat.
In de sfeer van Mars spreekt Dante lang met zijn voorvader Cacciaguida. Deze 'dateert' zichzelf rekenkundig-astronomisch als volgt:

Vanaf de dag dat 't Ave klonk tot die
waarop mijn moeder, nu een hemelinge,
van mij, van wie ze zwanger ging, beviel,

kwam deze rosse Mars vijfhonderdvijftig
en dertig maal weer terug tot bij zijn Leeuw
om aan diens voeten steeds weer op te vlammen.
[Par. XVI, 37]

Het 'Ave': de aankondiging aan Maria van de komende geboorte van Christus. De martiale Cacciaguida moet rond 1091 geboren zijn, zo valt af te leiden uit deze aanduidingen; de Ptolemaeïsche astronomie is daar nauwkeurig genoeg voor.
In de Convivio verbindt Dante de zeven sferen op een bijzondere manier met de zeven vrije kunsten, dat is een originele bijdrage van Dante aan de astrologie. Jupiter staat dan voor de Geometrie. Dante geeft daar twee redenen bij. Ten eerste: zoals Jupiter met zijn matigende invloed staat tussen de koude Saturnus en warme Mars, zo staat de Geometrie tussen punt en cirkel. Ten tweede: Jupiter is als enige zilverwit van kleur en ook de Geometrie is zuiver en vrij van elke dwaling. De meetkunde hoort dus bij Jupiter. Quod Erat Demonstrandum!

In de Divina Commedia noemt Dante dit verband niet, maar als Dante in de sfeer van Jupiter is, wordt (toevallig?) juist een gezang aangeheven door de hemelingen, dat zo begint:

..... *'Degene die de grens*
der wereld met zijn passer trok .....
[Par. XIX, 40-41]

Dit beroemde beeld van de schepper met de passer had zijn bijbelse oorsprong, maar niet in de scheppingsverhalen in Genesis. De Wijsheid spreekt hier in het boek Spreuken, dat volgens bijbelkundigen deels uit een andere traditie komt dan die van het Mozaïsche scheppingsverhaal. Geometrischer misschien:

Toen Hij de hemelen bereidde, was Ik daar;
toen Hij een cirkel over het vlakke des
afgronds beschreef.
[Spreuken 8: 27; Statenvertaling]

op weg naar het onbegrijpbare

Buiten de sfeer van de vaste sterren, de achtste, ligt het Primum Mobile, de snelst bewegende sfeer. Een opmerkelijke beschrijving bij de overgang naar deze alles aandrijvende sfeer:

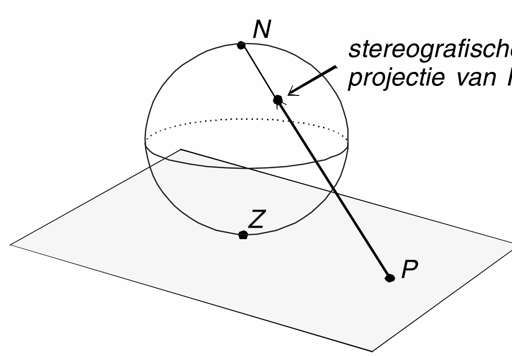
Die sfeer, die 't hoogst en 't levendst is, is zó
eenvormig dat ik niet kan zeggen wat voor
een plek Beatrice daarin voor mij koos.
[Par, XXVII, 100-102]

Hier begint de 'gewone' geometrie toch wel te wringen. Het maakt niet meer uit waar we deze sfeer in gaan, het gaat alleen maar om het begrip omhoog. Waar ook op de bol dit gebeurt, het is altijd in de richting van het ene Punt, waarmee Dante in de laatste canto's de plaats van het Goddelijke aanduidt.

Deze verzen hebben aanleiding gegeven tot bijzondere beschouwingen. William Eggerton bijvoorbeeld gebruikt dit fragment om inzicht te geven in de moderne kosmologie onder de spannende titel '*Dante, Hyperspheres, and the curvature of the Medieval Cosmos*' (Journal of the History of Ideas, 1999, pag. 195).

Een redelijk eenvoudige voorstelling kan met wiskundige middelen wel kort geschetst worden. We kunnen het ene Punt dat bereikt wordt door in welke richting dan ook van het Empyreum te gaan, beschrijven als het toevoegen van een extra punt aan de gewone ruimte, en dan 'mathematisch' afspreken, dat de gewone punten van punten van de ruimte dichter bij dat extra punt liggen naar mate ze verder weg liggen vanuit een vast uitgangspunt.

Denk bijvoorbeeld aan het stereografisch projecteren van een vlak naar een bol, waarbij het extra punt het centrum van de projectie is, dat op de Noordpool van de bol ligt, als de Zuidpool het raakpunt van bol en vlak is. De Noordpool is dan een punt dat wel op de bol ligt, maar dit punt correspondeert niet met een van de gewone punten van het vlak; het is als het ware het aan het vlak toegevoegde oneindige verre punt. De constructie heet een *één-punts compactificatie*, en kan voor veel meetkundige ruimten, ook de driedimensionale van de wereld van



Dante, uitgevoerd worden. Bij de stereografische projectie gaat de (vlakke) ruimte over in een gekromde, liggend in een ruimte van een dimensie hoger. Dimensies, kromming: termen die bij Eggerton uiteraard veelvuldig voorkomen.
In Par. XXVIII schildert Dante nogmaals het beeld van de negen engelenkoren, die in concentrische cirkels om het Ene Punt wentelen. Nu vinden we Serafijnen en Cherubijnen in de binnenste cirkels, de hele volgorde van het eerder doorlopen heelal is hier in het Empyreum weerspiegeld aanwezig, zoals concentrische cirkels bij de aan stereografische projectie verwante meetkundige inversie zich gedragen: ze verschijnen in omgekeerde volgorde en het oneindig verre van alle richtingen wordt geprojecteerd naar één punt.
Op wat bekender wiskundig terrein komen we met de wiskundige parabel van het schaakbord; die wordt gebruikt om de grootte van het aantal engelen te suggereren:

Zij waren een duizendvoud wel van de som
die velden op dat schaakbord produceerden.[1)]
[Par. XXVIII, 92-93]

Dante geeft ons iets verder bovendien alle kans te zeggen dat de Tijd zelf, zoals het in de moderne natuurkunde van de Big Bang past, vóór de schepping niet bestond:

Niet dat hij voordien werkeloos terneerlag,
noch vroeg, noch laat ín tijd begon Gods geest
uiteen te zweven over deze wateren.
[Par. XXIX, 19-21]

Buiten de sfeer van het Primum Mobile ligt het Empyreum, het hart van de Hemel als het ware. Daar ziet Dante ook de rivier van Licht. Beatrice raadt hem eruit te drinken en dan kan Dante pas de ware vorm ervan zien:

En amper had het ooglid er een teug
van ingedronken of de stroom, zo leek mij,
was niet meer recht gestrekt maar cirkelrond.
[Par. XXX, 88-90]

De stromende rivier, symbool van leven en tijd, vervormt zich tot cirkel, symbool van de eeuwigheid, die Dante nu kan zien.
Het lijkt er dan even op dat dit de eeuwigheid is van de tijd als in zich zelf terugkerende cirkel. Dat was ongetwijfeld een bekend beeld voor Dante; het staat in de Timaeus van Plato, vermoedelijk de enige dialoog die Dante van Plato in Latijnse vertaling kent. Dante noemt elders de Timaeus in verband met Plato's idee over het terugkeren van de ziel naar zijn eigen ster. Dit idee wordt door Dante afgewezen, geheel in lijn met de katholieke leer, die de ziel niet als onafhankelijk, maar als deel van het individu ziet. Reïncarnatie past daar ook al niet bij, aan het einde der tijden wordt immers ons 'eigen' lichaam weer met de 'eigen' ziel herenigd. Ook een onafgebroken reeks identieke geschiedenissen - de tijd als een draaiend rad - staat haaks op de Christelijke heilsleer, waarin de kruisiging en herrijzenis van Christus een uniek moment in de tijd is en geen reeks voorstellingen van een kunstenmaker. Aldus Augustinus, in *De Civitate Dei*. Dante gelooft in échte eeuwigheid. Boven de poort van de Hel las hij dan ook:

Aan mij voorafgaand werd alleen gemaakt
wat eeuwig is, en eeuwig duur ook ik;
geef elke hoop dus, wie hier ingaat, op.
[Hel III, 7-9]

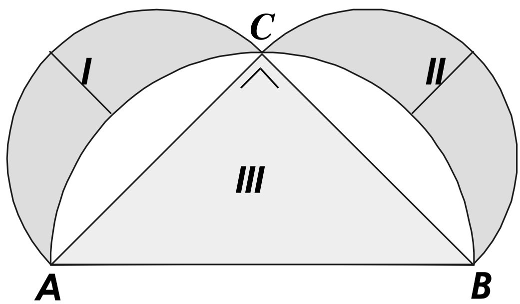
Dat klinkt definitief en onherhaalbaar. De cirkel is perfectie en symboliseert misschien eeuwigheid, maar geen herhaling.

de kwadratuur van de cirkel

Het was een aardige exercitie de meetkunde van Primum Mobile en Empyreum begrijpelijk te maken met de middelen van de moderne wiskunde en natuurkunde. Op zich is er niets op dat spel tegen. Maar het lijkt me precies de verkeerde manier om te begrijpen wat *Dante* met zijn wiskundig getinte beelden wil aangeven. Dante laat de wiskunde en de wetenschap in het algemeen wel de koers van de rede varen, maar voor hem ligt in de Rede ook een beperking: het Goddelijke gaat boven de rede uit. De meetkundige onbegrijpelijkheid (in 13e eeuwse zin) van de tiende hemel-sfeer, die buiten de wereld van Ptolemaeus valt, is daar misschien al een illustratie van.
Het boven de rede staan van het Goddelijke wordt in het slot van de Commedia expliciet aangegeven en met een wiskundig beeld krachtig onderstreept. Dante verwijst in het slot van het 33ste canto namelijk heel duidelijk naar het onoplosbare probleem van de kwadratuur van de cirkel. Dit oorspronkelijk Griekse probleem vraagt om het construeren van een vierkant met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel. Construeren moet opgevat worden in de zin van de Griekse meetkunde. Uitgaande van gegeven figuren, mogen daarbij alleen lijnen en cirkels geconstrueerd worden met behulp van eerder geconstrueerde punten. Een nieuwe lijn moet dus door eerder geconstrueerde punten gaan en een nieuwe cirkel moet een eerder geconstrueerd middelpunt hebben en door een eerder geconstrueerd punt gaan. Nieuwe snijpunten van lijnen en cirkels tellen mee als geconstrueerde punten. Niets valt uit de lucht, alles wordt uit het eerder bekende opgebouwd.
De kwadratuur van de cirkel vraagt op deze wijze stapsgewijs tot een vierkant te komen met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel. Omdat de Griekse meetkunde een constructiemeetkunde is volgens de hier gegeven regels, is dat een voor de hand liggend probleem. Maar: er werd nooit een correcte oplossing gevonden. Gezien de fabelachtig ingewikkelde constructies die geleverd werden voor andere problemen, was Dante's veronderstelling dat het om iets onmogelijks ging niet zo vreemd. Bewezen is deze onmogelijkheid echter pas in 1882[2)] . Wie het idee vreemd vindt dat er bewezen kan worden dat een probleem volgens bepaalde regels *niet* kan worden opgelost, moet maar even zelf proberen te beredeneren waarom het getal 17 *niet* het resultaat kan zijn van een optelling van twee gehele getallen. Zo'n redenering is niet moeilijk te vinden, en laat zien dat onmogelijkheidsbewijzen mogelijk zijn.
Dante moet gefascineerd zijn door dit gegeven, hij noemt het probleem al in zijn *Convivio*, met een onjuiste redenering. Het fragment is een onderdeel van de passage waarin de meetkunde astrologisch aan Jupiter wordt toebedeeld:

> *Met als gevolg dat de Geometrie zich tussen het punt en de cirkel beweegt als tussen begin en einde. Deze twee tasten ook haar zekerheid aan, omdat het punt ondeelbaar en daarom onmeetbaar is en de cirkel zich door zijn ronding niet in een vierkant laat onderbrengen.*

Door zijn ronding? Dante gaat hier even te kort door de bocht, hij suggereert een te gemakkelijk bewijs voor de onmogelijkheid van de kwadratuur van de cirkel. Kromlijnige figuren kunnen soms wél redelijk gemakkelijk met rechtlijnige zoals vierkanten worden vergeleken. Hippocrates had bijvoorbeeld al rond 450 voor Christus zijn beroemde maantjes geconstrueerd. In de figuur zijn de kromlijnige maantjes I en II in oppervlakte samen gelijk aan de rechtlijnige driehoek III.



De halve cirkel op AB is in oppervlakte immers gelijk aan de halve cirkels op AC en CB samen, dit is een gevolg van de stelling van Pythagoras. Door weglaten van overlappende delen zien we dan de oppervlakte-gelijkheid

I + II = III

verschijnen. We kunnen echter nooit een cirkel door verdelen in eindig veel stukken en verleggen van de stukken tot een vierkant maken; Dante's 'door zijn ronding' geeft een aanzet voor het niet zo moeilijke bewijs van deze bewering.

In Hoofdstuk 3 van het politieke traktaat 'De Monarchie' noemt Dante het probleem weer, als voorbeeld dat een onmogelijkheid geen geschil hoeft te zijn:

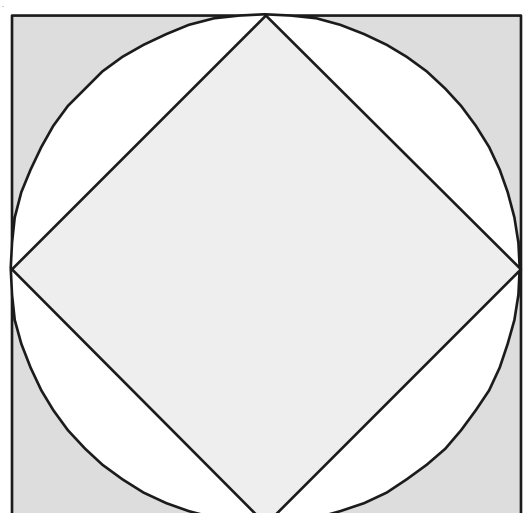
Zo kent bijvoorbeeld de meetkundige de kwadratuur van de cirkel niet, maar dat is niet iets waar hij over polemiseert.

Op een onopvallende manier gaat het volgende fragment uit de Commedia ook in op de kwadratuur van de cirkel.

Vergeefs, nee erger, vaart een mens uit, die wel op waarheid vist, maar die kunst niet verstaat: hij keert heel anders terug dan hij ooit zee koos.

De wereld demonstreert dit klaar en vaak:
Parmenides, Melissus, Bryson, velen
vertrokken wel, maar wisten niet waarheen.
[Par. XIII, 124-129]

Bryson, ook van rond 450 voor Christus, meende het probleem van de kwadratuur van de cirkel opgelost te hebben. Overgeleverd wordt namelijk dat hij uit de figuur hieronder afleidde dat de oppervlakte van de cirkel gelijk is aan het gemiddelde van de oppervlaktes van het omgeschreven en ingeschreven vierkant. Dat is geen goede redenering, ook volgens Dante![3] Bijzonder is dat het noemen van een naam al met betekenis geladen kan zijn.



Bryson's fout wordt afgestraft, en dat als voorafschaduwing van het betoog dat de menselijke rede niet alles vermag.

Dante kende het probleem van de kwadratuur van de cirkel duidelijk als onoplosbaar, en gebruikt het als zodanig in zijn slotcanto, waarvan zo dadelijk het slotgedeelte volgt.
Het 'evenbeeld' dat daar genoemd wordt, verwijst weer naar de Bijbel, die vertelt dat de mens geschapen is als evenbeeld van God.
Christus ís mens en God tegelijk, en dit gaat Dante's redelijke vermogens te boven. Zoals de tot het uiterste geconcentreerde mathemaat de cirkel niet kan meten kan hij dat niet 'begrijpen'. Op het moment dat hij dat beseft, slaat een bliksemflits toe, want op eigen kracht reikt zijn begrip niet zo hoog. Bliksemflits: alweer een bijbelse verwijzing. Ingewijden herkennen moeiteloos Saulus op weg naar Damascus, in Handelingen der Apostelen, 9:3.
De onmogelijkheid van de kwadratuur van de cirkel is beeld van de beperktheid van de Rede, die overstegen wordt door de flits van het visioen, dat ook de Commedia beëindigt. De beweging van de hemelen door de Goddelijke Liefde besluit alles:

De cirkelgang die, zo geconcipieerd,
in u aan 't licht trad én uw licht weerkaatste,
behield, zo scheen het mijn volhardend oog,

diep in zich zelf dezelfde, eigen, kleur wel,
maar íets, in 't beeld leek 't evenbeeld van ons,
zodat mijn blik er nu geheel in opging.

Gelijk een mathemaat slechts één ding wil,
en daar maar niet in slaagt: de cirkel meten
- hij denkt en denkt, maar vindt 't beginsel niet -

zo wilde ik bij 't ongewone schouwspel
slechts zien hoe met die cirkel zich dat beeld
verdroeg en in zo'n pure omtrek introk,

maar zó hoog vloog ik niet op eigen kracht;
mijn geestesoog moest eerst getroffen worden
door 'n bliksemschicht: die schonk mij dat gezicht.

Verheven beeldingskracht was hier onmachtig,
maar reeds bewoog mijn lust en wil – een wiel
in immer eendere wentelgang – de liefde

die ook de zon beweegt en de andere sterren.
[Par. XXXIII, 127-145]

Aad Goddijn

noten

1. De bedelaar die aan een koning het schaakspel uitlegde vroeg als nederige beloning één korrel graan op het eerste veld van het bord, twee op het volgende veld, dan vier, enzovoort, steeds verdubbelend. In Dante's origineel staat de verdubbeling genoemd, doppiar: piú che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla.

2. Door F. Lindemann. Een verwijzing binnen de schone letteren: James Joyce (die in 1882 geboren is) verwijst er naar in de Circe-episode van zijn Ulysses. Voor wiskunde-lezers, zie het (betrekkelijk!) eenvoudige bewijs in *Introduction to the theory of numbers* van Hardy en Wright.

3. Thomas Heath, eminent historicus van de Griekse wiskunde, neemt het echter voor Bryson op, omdat hij er van uit gaat dat zo'n domheid eerder door de navertellende critici dan door Bryson zelf begaan zal zijn.

ARS ET MATHESIS

De Stichting ARS ET MATHESIS (opgericht in 1983) heeft tot doel de belangstelling te bevorderen voor kunst die zijn inspiratie vindt in de wiskunde. Dit gebeurt onder meer door tentoonstellingen, publicatie van boeken en artikelen, het uitgeven van het blad 'ARTHESIS' en het organiseren van een jaarlijkse ARS ET MATHESISdag (diverse voordrachten gecombineerd met een dag-expositie waar werk van velerlei exposanten is te bekijken).

donateurs: Donateurs (minimum donatie € 15,- per jaar) ontvangen Arthesis en hebben gratis of tegen gereduceerd tarief toegang tot de jaarlijkse Ars et Mathesisdag. Bijdragen kunnen worden overgemaakt op bankrekening nummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn; s.v.p. met duidelijke vermelding van eigen naam en adres, en van 'Ars et Mathesis'.

secretariaat: A. Goddijn; ws. Nejo, Dijksgracht 18, 1019 BT, Amsterdam
email: A.Goddijn@fi.uu.nl

aanmelding als donateur, adreswijzigingen, bestellingen:
Ineke Lambers; Noorderkroon 77, 9301 JW Roden
tel. 050-3601301; email: ilambers@wxs.nl.

email: info@arsetmathesis.nl

website: http://www.arsetmathesis.nl

Ars et Mathesisproducten

verkrijgbaar: Sangaku-kwartet [sk], Sangaku-poster A3 of A4 [sp], Sangaku-leliekaart [slk], Sangaku-lelieposter A3 of A4 [slp]: nederlands of engels [n of e]; ***nieuw:*** Orosz-kwartet [ok]; kwartet "orde-chaos" Monika Buch [bk]; A&M poster A3 of A4 [amp]; A&M knoop-kaart [amkk]; A&M letterkaarten [amlk]; A&M jubleumkaart 1998 (''luchtkubus") [amjk]; A&M jubileumposter A3 of A4 [amjp]; losse nummers Arthesis vanaf jaargang 14 [art/jaargang/nr]; set van 2 verzamelposters 'A&M-kunst' op hoogglanspapier A3 of A4 [vp].

prijzen: kaarten (set van 4) € 5, poster A4 € 2,50, poster A3 € 6, nummers Arthesis € 3,50; voor toezending A3 posters plus € 2,50, overig plus € 1,20; set van 2 posters vp: A3 € 14/toezending € 5, A4 € 8/toezending € 2.

bestelwijze: door overmaken van het totaalbedrag op gironr 1315269 t.n.v. J.J. Lambers-Hacquebard, na bericht per post of email aan Ineke Lambers (adres zie boven) onder vermelding van 'AM-bestelling', en opgave van gewenste aantallen en soorten producten en het adres waar de bestelling naar toe moet worden gezonden. Gebruik s.v.p. de hierboven tussen [ ] vermelde codes.

bestelwijze catalogus "Bomen van Pythagoras": zie Arthesis 2004 nr 1, pag. 18