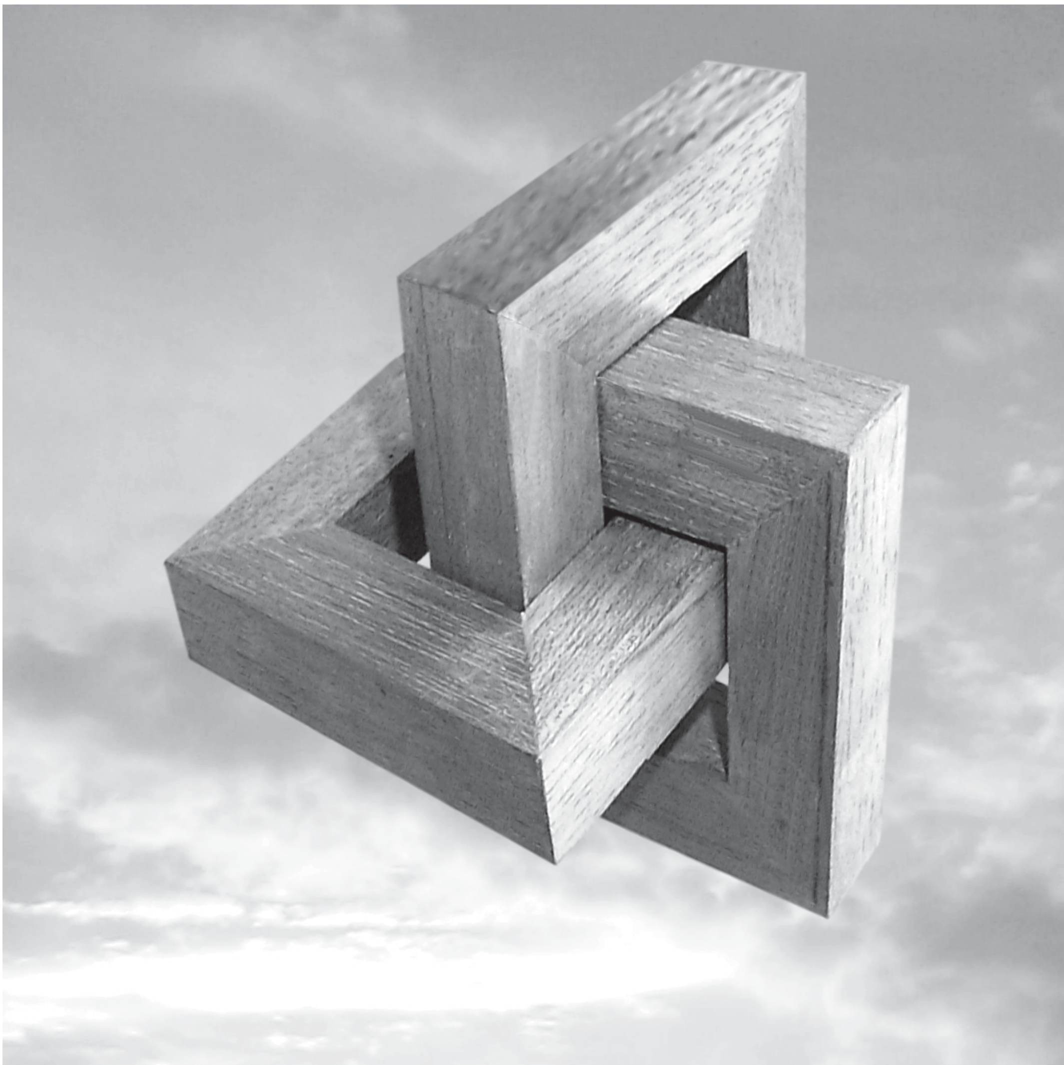
ARTHESIS

jaargang 15, nummer 1



een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis

inhoud

ARTHESIS

jaargang 15, nummer 1 - februari 2001

Arthesis is een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis en wordt gratis toegezonden aan de donateurs van de Stichting. Losse nummers fl 7,50 (bestelwijze: zie kader op pag. 19).

omslag knoop Koos Verhoeff, montage Ineke Lambers

redactie Albert van der Schoot
Rinus Roelofs
Ineke Lambers (vormgeving)

redactie-adres Albert van der Schoot,
‘t Ven 24, 1115 HB Duivendrecht
email: schoot@hum.uva.nl

inzenden kopij
Bij voorkeur in digitale vorm: tekst als WP- of Word-bestand; illustraties in de vorm van een goede foto of duidelijke tekening (indien mogelijk het origineel, liever geen scan of fotokopie), of digitaal aangemaakt (vectortekening in CDR of AI format; bitmaps als Jpeg of Tiff bestand in voldoende hoge resolutie).

van Bach tot wobbel

Dat het precies 250 jaar geleden was dat Johann Sebastian Bach de laatste adem uitblies – daar konden we op de Ars et Mathesisdag 2000 niet omheen. Bach is tenslotte niet alleen de componist die door beoefenaars van allerlei muzikale stijlen wordt erkend als de onbetwiste grootmeester, maar ook een kunstenaar wiens werk vaker dan dat van de meeste andere componisten in verband wordt gebracht met wiskundige structuren.
Over welke structuren het dan precies zou gaan is moeilijker uit te maken. In cantates en koraalvoorspelen zoeken we tevergeefs naar de muzikale parallellen van de rotatiesymmetrieën en de cirkellimieten die ons helpen inzicht te krijgen in de structuur van het werk van Escher. De contrapuntische structuur van een tripelfuga levert genoeg stof tot musicologisch puzzelwerk op, maar de regelmaat van de grafische uitwerking van een formule ontbreekt. Wat daar vaak voor in de plaats wordt gesteld zijn overwegingen over de relatie tussen Bachs muziek en getalsstructuren. Bekend en omstreden werd het boek van Kees van Houten en Marinus Kasbergen, *Bach en het Getal* (Zutphen 1985), en onlangs verscheen het proefschrift van Thijs Kramer, *Zahlenfiguren im Werk Johann Sebastian Bachs* (Hilversum 2000).

Op de Ars et Mathesisdag maakten twee gastsprekers ons deelgenoot van hun visie op getalsstructuren bij de Thomascantor. Kees Vellekoop, hoogleraar muziekwetenschap, betoogde dat bij een bepaalde opvatting over tempowisseling in een deel uit het eerste Brandenburgs Concert een permutatiespel naar voren komt dat Bach gespeeld zou kunnen hebben met de cijfers 1, 2 en 6: delen van het stuk zijn dan opgebouwd uit resp. 126, 162 en 216 tijdseenheden. Misschien nog wel meer dan met deze getallencombinaties verraste Vellekoop met de opmerking dat wanneer, in de Matthäuspassion, elf van de twaalf discipelen zich ervan willen overtuigen dat zij niet degene zijn die Jezus zal verraden, zij dit doen met de elfletterige tekst: 'Herr, bin ich's?' Wanneer tenslotte ook de twaalfde discipel, Judas, die vraag stelt, doet hij dat met de woorden: 'Bin ich's, Rabbi?' Inderdaad: twaalf letters. Wordt hier gespeeld met getallen? Zo ja, dan niet door Bach: die houdt zich keurig aan de Duitse tekst van het Nieuwe Testament (Matth. 26: 22-25). Maar Frans Oort, hoogleraar wiskunde, liet zien en horen dat Bach dat elftal discipelen wel op een andere manier in het spel brengt: precies elf keer immers klinkt het 'Herr!' uit de vraag in het koor – drie keer in de sopraan, drie keer in de alt, drie keer in de tenor, en twee keer in de bas. Als Judas tenslotte, na het volgende koraal, het twaalftal vragenstellers volmaakt, vult hij ook het koor aan: zijn vraag klinkt in de bas.

Omdat het tenslotte de dood van Bach was die vorig jaar herdacht werd, maakte ondergetekende het publiek deelgenoot van Douglas Hofstadters visie op de doodsoorzaak. Daar zal in het volgende nummer van *Arthesis* verder over worden uitgeweid. Als afsluiting van die bijdrage kwam toen Aad Goddijn de laatste, onvoltooide fuga uit Bachs *Kunst der Fuge* ten gehore brengen op zijn eigen klavecimbel. Dat klavecimbel en het veelzijdig talent van zijn bespeler kwamen ook in het middagprogramma goed van pas, waarin Zsofia Ruttkay en Aad een interactieve sessie hadden georganiseerd op basis van Mozarts muzikale dobbelspel. Dit bestaat uit een groot aantal losse maten waaruit door dobbelen een selectie wordt gemaakt, die telkens tot een 'ander' menuet leidt. Zsofia liet zien hoeveel mogelijkheden het ijverig dobbelende publiek wel niet tot zijn beschikking had, en Aad legde uit hoe de harmonische structuur als bindmiddel fungeert dat voorkomt dat het stuk uit elkaar valt. We hopen er in een volgende *Arthesis* meer over te lezen. Zsofia blijft intussen op haar werkplek, het CWI in Amsterdam, exposities verzorgen van mathematisch geïnspireerde kunstenaars. Tot eind februari is dat spiegelkunstenaar Hans Kuiper, daarna is er weer ruimte voor anderen; de site <www.cwi.nl> houdt u op de hoogte. Wilt u overleggen over expositie van eigen werk, bel dan Zsofia: 020-5924144 of 035-6561192.

Naast de muzikale bijdragen was er op de novemberdag ook ruimte om het oog te strelen. Rinus Roelofs deed dat door te laten zien hoe artistiek de transatlantische telefoonverbindingen gebruikt worden in zijn e-mailcontact met de Amerikaanse kunstenaar Tom Longtin. Hun parallelle interesse in het digitaal beeldhouwen leidt tot frequente uitwisseling van nieuw gevonden mogelijkheden; in dit nummer van *Arthesis* vertelt Rinus meer over zijn collega. Tenslotte joeg Bruno Ernst ons nog de stuipen op het lijf door een paar *lelijke* onmogelijke driebalken te laten zien, en zich af te vragen waar we niet alleen bij mogelijke maar ook bij onmogelijke figuren onze esthetische voorkeur op baseren. Verderop in dit nummer gaat hij als Hans de Rijk aan de wiebelrol met de wobbelbol, ter inspiratie van de knutselaars onder ons.
Peter Raedschelders, die ons al vaak verraste met regelmatige vlakvullingen gebaseerd op een geometrisch uitgangspunt, ging ditmaal eens van aritmetische formules uit. De modulus-functie van die formules leidde tot de grafische voorstellingen die u in dit nummer aantreft.

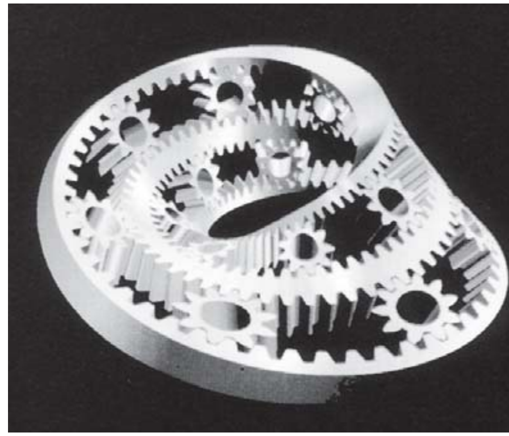
Een kunstvorm die weinig aan bod komt in *Arthesis* is de literatuur. Begrijpelijk: het is maar een heel enkele keer dat literatuur *in haar vorm* de aandacht vestigt op een wiskundige structuur. Aad Goddijn verzamelde een aantal literaire teksten met een wiskundig *thema*: parallellen, en laat zien wat Euclides' vijfde postulaat in de literatuur heeft aangericht. Een bespreking van een recent verschenen boekje dat in de boekenkast van geen enkele rechtgeaarde artheticus mag ontbreken sluit daarbij aan.

Het zal u niet zijn ontgaan dat de namen van de sprekers op de Ars et Mathesisdag èn die van de auteurs van bijdragen aan *Arthesis* een verrassende gelijkenis vertonen met de namen van uw bestuursleden. Het is aan u om dat machtsmonopolie te doorbreken! Hoewel het ons niet ontbrak aan materiaal om deze en ook de volgende *Arthesis* mee te vullen, staat de postbus van de redactie (zie kader op pag. 2) altijd open voor nieuwe bijdragen. Uitbreiding van de kring van scribenten wordt op prijs gesteld.

Albert van der Schoot

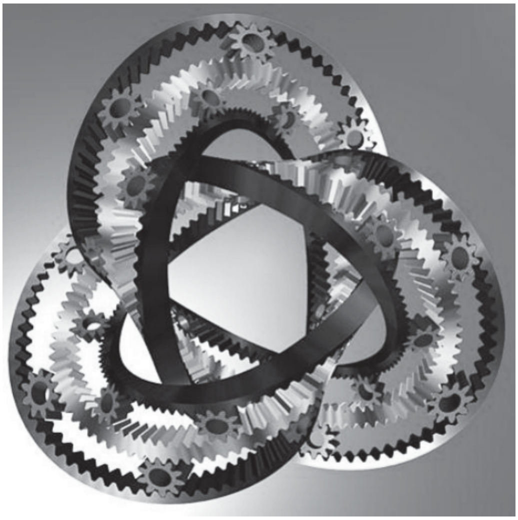
bijzondere vormen van Tom Longtin

Ongeveer een jaar geleden kwam ik via het internet in contact met Tom Longtin. In een zogenaamde nieuwsgroep, waar je met vragen over een bepaald tekenprogramma terecht kunt, kwam het probleem aan de orde hoe je van een object, ontworpen met dat tekenprogramma, een bouwplaat zou kunnen maken. Met zo'n bouwplaat zou het dan mogelijk zijn om snel tot bijvoorbeeld een kartonnen model te komen. Tom Longtin had voor dit soort problemen al eens computerprogramma's geschreven. Al snel bleek dat Tom Longtin niet alleen programmeur was maar ook beeldend kunstenaar en dat hij deze twee activiteiten op een boeiende manier wist te combineren.
In Japan was op dat moment de tentoonstelling *"Extrasensory Museum" – Commemorating the100th Anniversary of M.C.Escher's Birth* te bezichtigen, waar werk bijeengebracht was van door Escher geïnspireerde kunstenaars. Van Tom Longtin was de computeranimatiefilm "Gears" te bewonderen, met o.a. Moebius-vormige bewegende tandwielconstructies. Tom Longtin: "In 1974 kocht ik het boek *'The Graphic Work of M.C.Escher'*. Dat was mijn eerste kennismaking met zijn kunst, ver voordat ik me bezighield met computers. In feite waren op dat moment 3D computerafbeeldingen nog nauwelijks bekend. In de jaren daarna was ik regelmatig onder de indruk van het werk van Escher, hoewel het toen nog niet in me opkwam dat ik ooit zelf beelden zou maken welke zelfs maar zouden doen denken aan Escher. Tien jaar later had ik me enigszins bekwaamd

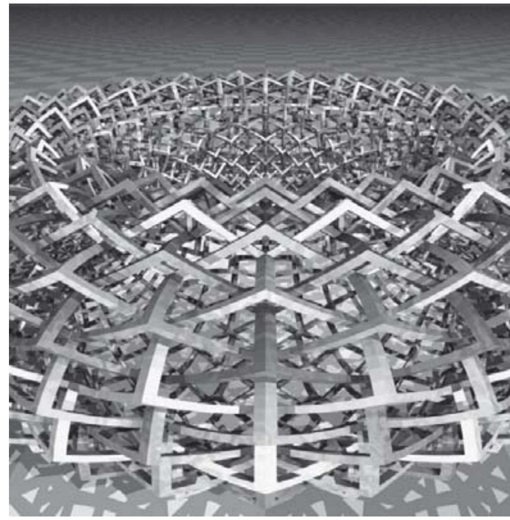


still uit Tom Longtins animatiefilm

in het werken met computers, en geïnspireerd door het werk van Escher zijn toen de animaties ontstaan, als een soort Escher-in-beweging." Op de web site van Tom Longtin is een verkorte versie van deze film te vinden.
Tom is verder gegaan met het vervaardigen van digitale kunst en was met zijn programmeursachtergrond in staat de meest complexe beelden te genereren. Enige voorbeelden hiervan zijn de tandwielenknoop en de torus opgebouwd uit 3 identieke roosters. Dit zijn beelden die niet direct getekend worden met een tekenprogramma, maar waar eerst een soort generatief programma, een script, voor wordt geschreven. Dit script maakt dan dat het tekenprogramma het beeld kan genereren.
Het e-mail contact tussen Tom en mij was inmiddels uitgegroeid tot een samenwerkingsverband. Tezamen lieten we onze vaardigheden en creativiteit los op een aantal grondvor-



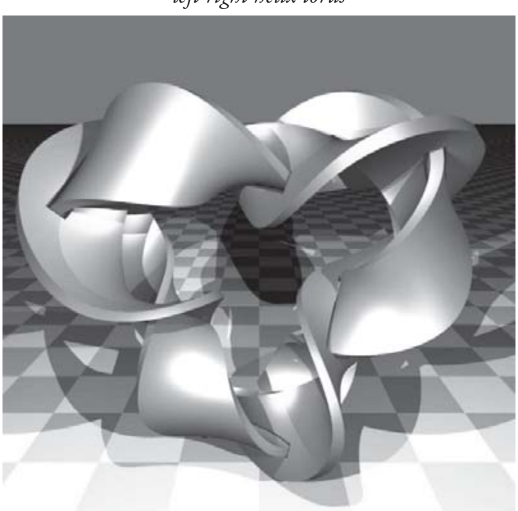
tremob



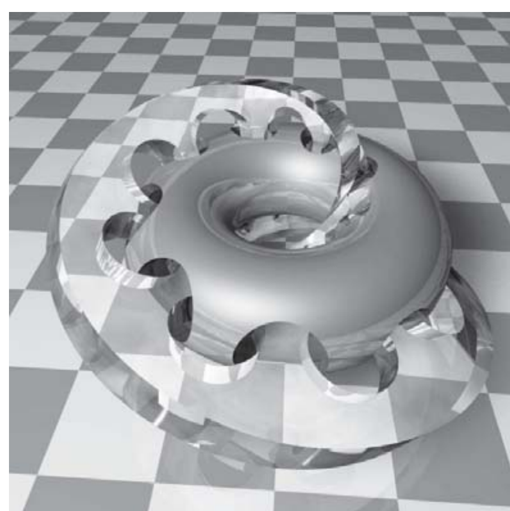
lattice

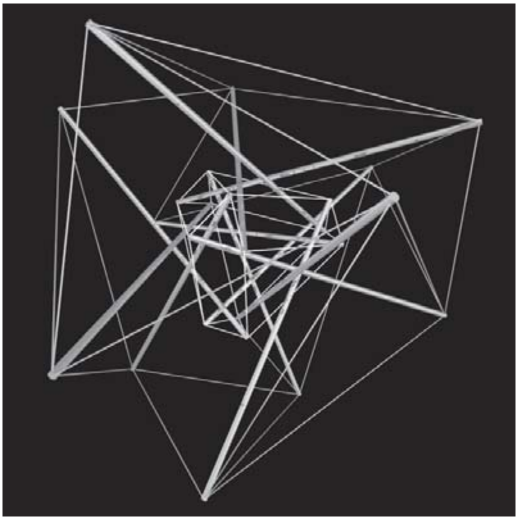
men: torus, knoop en Moebiusband werden gebruikt als basis. En stapsgewijs groeiden grondvormen dan uit tot interessante objecten. Op de laatste Ars et Mathesis dag is hiervan uitgebreid verslag gedaan. De hieronder afgedrukte beelden van Tom Longtin laten bijvoorbeeld een mooie combinatie van een linksdraaiende en een rechtsdraaiende band zien, en een combinatie van torus en Moebiusband. Een ander onderwerp waar Tom zich mee bezighoudt zijn de tensegrity constructies. Volgens de definitie bestaan dit soort constructies uit staven en draden, en wel zo dat alle draden met elkaar zijn verbonden, terwijl niet

left right helix torus



moebius torus





tetrahedron tensegrity

alle staven onderling zijn verbonden. Er is dus in dit soort objecten altijd een "continuïteit" in de draden aanwezig. Momenteel werkt Tom aan modellen waarbij hij de draden in twee onderling niet verbonden groepen verdeelt. Een reactie van Kenneth Snelson (samen met Buckminster Fuller uitvinder van de tensegrity constructies, bekend van zijn "Needle Tower" in het beeldenpark van het museum Kröller-Müller): "Your 12 struct tensegrity structure is beautiful and the way you've divided the tension into an outer and an inner system is an arrangement I'm not familiar with - particularly interesting and inventive. I wish I could give a sage comment on your 12 struct form but all I can say is that you've done a beautiful job picturing an elegant and complex form that I've not seen before." Hetgeen aangeeft dat dit tot interessante nieuwe tensegrity objecten kan leiden.

Rinus Roelofs

adres web site : http://www.sover.net/~tlongtin/

getallentheorie, symmetrie en modulus-grafieken

Wiskunde kan leiden tot mooie grafische voorstellingen. Soms komen we patronen tegen die volledig gebaseerd zijn op wiskundige formules - bijvoorbeeld fractals - die als mooi ervaren worden. Eén van de eigenschappen van een figuur die zijn schoonheid voor vele mensen bepalen is zijn graad van symmetrie; figuren met veel symmetrie worden veelal ervaren als figuren met veel 'schoonheid'.
Men kan nu computerprogramma's schrijven zo dat er figuren ontstaan die veel symmetrie hebben, maar soms kunnen er ook eerder bij toeval figuren gevonden worden die een grotere mate van symmetrie hebben.

Enkele jaren geleden ben ik een tijd bezig geweest met gehele getallen van de vorm:
$X^2 + Y^2 = Z$ (X, Y en Z gehele getallen).
Het lijkt een beetje op de getallen van Pythagoras $X^2 + Y^2 = Z^2$, maar in ons geval is het niet nodig dat de uitkomst een kwadraat is. Met andere woorden: we waren op zoek naar gehele getallen Z die te schrijven zijn als de som van twee kwadraten. Snel bleek dat het soms mogelijk was een zelfde getal Z op twee verschillende manieren te schrijven als de som van twee kwadraten, bijv. $65 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$. Als we deze oplossingen (7,4) en (8,1) beschouwen als de coördinaten van punten, dan kun-

nen we ze op een grafiek uitzetten en dan zijn de 2 punten voorstellingen van het getal 65. Als we ook negatieve oplossingen toelaten dan hebben we onmiddellijk meerdere oplossingen, bijv. (-7,4), (-8,-1) etc. Al deze oplossingen liggen op een cirkel met als middelpunt de oorsprong (0,0). Dit is logisch, daar de vergelijking $X^2 + Y^2 = Z$ de vergelijking is van een cirkel met straal Z en middelpunt (0,0). Als men de punten (7,4) en (8,1) met een lijnstuk verbindt, en we beschouwen dit lijnstuk als een zijde van een vierkant, dan blijkt dat de andere hoekpunten van het vierkant ook een getal voorstellen dat tweemaal te schrijven is als de som van twee kwadraten. Als we deze procedure herhalen dan krijgen we in formule:

> Als (A,B) en (C,D) een zelfde getal Z_1 voorstellen (dus $A^2 + B^2 = Z_1 = C^2 + D^2$), dan is $(A + n(D-B))^2 + (B + n(A-C))^2 = Z_2 = (C + n(D-B))^2 + (D + n(A-C))^2$ (waarbij n een willekeurig geheel getal is).

Al deze getallen Z uit bovenstaande reeks hebben een gemeenschappelijke deler.

Tot nu toe zijn we bezig met getallentheorie en zien we nog niets speciaals op onze grafiek. We zagen dat er paren punten waren die een zelfde getal Z voorstelden maar andere punten behoorden niet tot een paar. Er zijn voor $6^2 + 1^2 = 37$ geen andere positieve kwadraten die als men ze optelt ook 37 geven. (Natuurlijk is ook $1^2 + 6^2 = 37$, dit beschouwen we als dezelfde oplossing, hoewel het grafisch een ander punt voorstelt). We vermoeden dat als Z een priemgetal is dat Z dan maar op 1 manier te schrijven is als som van 2 kwadraten, maar bewijzen in verband met priemgetallen zijn dikwijls zeer moeilijk en het blijft dus bij een vermoeden. De vraag is eigenlijk (voor de puzzelaars onder ons): stel Z is een willekeurig geheel getal, zoek dan alle mogelijke sommen van twee kwadraten die gelijk zijn aan Z.

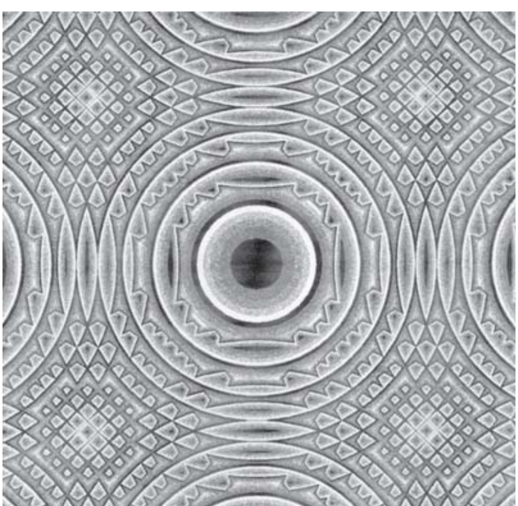
Op een bepaald moment hebben we toen nagegaan wat dit alles grafisch zou geven. Helaas schrijft men niet steeds alles op wat men doet of denkt, dus kan ik u nu niet meer de logische gedachtegang vertellen die er toen werd gevolgd. In ieder geval hebben we er de modulus-functie bijgehaald. AmodB = C ; dat doet niets anders dan nagaan hoeveel gehelen er overblijven als we een geheel getal A delen door een geheel getal B. Een voorbeeld zal veel duidelijk maken, bijvoorbeeld 17mod5 = 2, want als we 17 voorwerpen in hoopjes leggen van 5 zullen er 2 voorwerpen overblijven. Als we dit toepassen op het voorgaande dan is $(7^2 + 4^2)\text{mod}5 = 0$ want $7^2 + 4^2 = 65 = 13 \times 5$, dus rest 0. Andere punten (X,Y) zullen 1, 2, 3 of 4 als resultaat geven. Alle punten in onze grafiek met als resultaat 0 gaven we de zelfde kleur. Punten met resultaat $(A^2 + B^2)\text{mod}5 = 1$ gaven we een andere kleur, enzovoort. We kregen toen mooie grafische voorstellingen. Jaren geleden waren de computers nog ontzettend traag, daar de grafiek punt voor punt berekend moest worden. Gelukkig zijn de computers vandaag sneller en dus hebben we het recent opnieuw geprobeerd, met toch merkwaardige grafieken als resultaat. Voor elk punt (X,Y) wordt $(X^2 + Y^2)\text{mod}Z$ berekend (Z kunnen we willekeurig kiezen) en zo krijgt elk punt van onze grafiek een kleur. Met onze berekeningen krijgen enkel punten waarvoor X en Y gehele waarden hebben een kleur, en de ruimte ertussen zou leeg zijn. Gelukkig kunnen we de computer opdragen om de tussenruimten een kleur te geven die geleidelijk over-

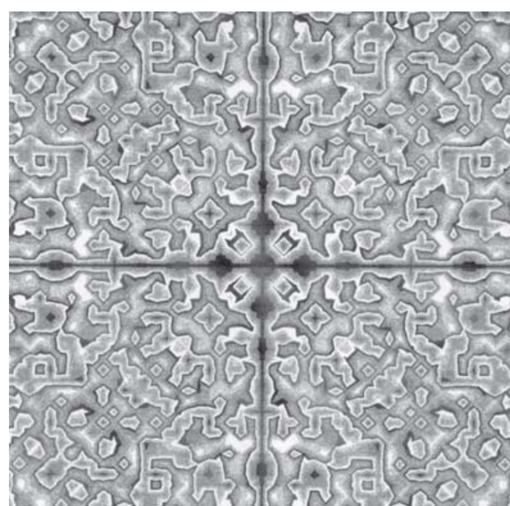
gaat van de kleur van het ene punt naar de kleur van het naastliggende punt.
Helaas kunnen we hier geen kleuren laten zien maar u kunt zich wel voorstellen dat in kleur dit alles nog mooier is. Onderstaand enkele voorbeelden van Modulus-grafieken.

We zijn inmiddels volledig afgestapt van de getallentheorie en hebben ook niet-gehele getallen toegelaten, en ook andere functies. We hebben dan ook totaal geen idee meer wat dit wiskundig betekent, alleen komen er steeds weer andere merkwaardige grafieken te voorschijn.
Onderstaande voorbeelden werden volledig door de computer getekend. We hebben enkel de formule laten berekenen voor 50 x 50 verschillende punten van onze grafiek. De overgang tussen twee punten werd door het programma berekend. We weten op voorhand bijna niet welke grafiek het resultaat zal zijn. Enkel het soort grafiek ligt ongeveer vast, naar gelang de functie die we gebruikten. We geven aan de computer een willekeurig getal en krijgen een grafiek. Een miniem verschil met dit getal (bv. 6,000001 i.p.v. 6) geeft een totaal andere grafiek, die wel tot de zelfde soort zal behoren. Als we de oorsprong in het midden leggen van de grafiek verkrijgen we een hoge mate van symmetrie.

Met het voorgaande hebben we trachten aan te tonen dat er soms merkwaardige grafieken te voorschijn kunnen komen in gebieden van de wiskunde waar men het niet verwacht. Althans voor ons waren ze onverwacht. Verder was het voor ons opnieuw een bevestiging dat de modulus-functie een zeer eenvoudige maar anderzijds toch een zeer krachtige formule is, met soms onverwachte resultaten. Theoretisch, qua berekeningen, houdt niets ons tegen om dit alles uit te breiden naar de derde of nog hogere dimensies. Helaas is het praktisch iets moeilijker om 3D-grafieken zichtbaar te maken waarbij elk punt van de ruimte een andere kleur heeft.

Peter Raedschelders





elf parallellen met een nawoord

the definition of Love

As Lines do Loves *oblique* may well
Themselves in every Angle greet:
But ours so truly *Parallel*,
Though infinite can never meet.
Andrew Marvell (1621-1678)
Fragment; origineel 28 regels

Die zwei Parallelen

Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab:
Das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da wards dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

Waren sie noch Parallelen?
Sie wußten es selber nicht, -
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie
als wie zwei Seraphim.
Christian Morgenstern (1871-1914)
Uit: Palma Kunkel (1916)

Parallèles

On va, l'espace est grand,
On se côtoie,
On veut parler.

Mais ce qu'on se raconte
L'autre le sait déjà,

Car depuis l'origine
effacée, oubliée,
C'est la même aventure.

en rêve on se rencontre,
On s'aime, on se complète.

On ne va plus loin
Que dans l'autre et dans soi.
E. Guillevic (1907-1997)
Uit: Euclidiennes (1977)

{**evenwijdige lijnen**

Wij gaan, de ruimte is groot
we lopen zij aan zij,
we willen praten.

Maar wat de een vertelt,
weet de ander al.

want sinds de oorsprong,
uitgewist, vergeten,
bleef het verhaal gelijk.

In een droom elkaar ontmoeten,
liefde en vervulling vinden.

Niemand komt ooit verder
dan in de ander en zichzelf.
vertaling: Maurits Dienske}

Vergelijkingen

Die hoekigheid: daar blijft het echt
om draaien. Twee binnenhoeken die een rechte
heeft gemaakt, die door twee rechten ging.
Zijn ze te scherp, dan is er uitzicht.
Maar zijn ze recht rest slechts oneindigheid.

Ik hang aan recht en wijs de hoeken af
die ik niet samen strekken kan. Geknakt
lijkt mij een slecht begin. Men hoort
zijn eigen rug te rechten, zelf het woord
in daden om te zetten. Trek recht het koord

dat eeuwig evenwijdig loopt. Maar onrust
trekt al eeuwen door dat ferme punt.
Wat zeker scheen bleef onbewezen
en laat zich slechts met moeite lezen,
strandt op een tartend kromme kust.

Dat naast en parallel: geef het maar op.
Alleen een spiegel kan voorkomen dat je botst.

Michael Zeeman (1958-)
Uit: Verhoudingen (1995)

Paradiso XVII

‘O cara pianta mia che sí t’insusi,
che, come veggion le terrene menti
non capére in triangol due ottusi,
cosí vedi le cose contigenti
anzi che sieno in sé, mirando il punto
a cui tutti li tempi son presenti.

Dante Alighieri (1265-1321)
Divina Commedia, Paradiso XVII, 13-18 (1315)

{O voorzaat die nabij de Schepper leeft,
Gij ziet, zo simpelweg als wij ontwaren
Dat geen driehoek twee stompe hoeken heeft,
Al wat geschieden zal in later jaren
Door in het hoge Punt te schouwen waar
Zich toekomst en verleden openbaren.

vertaling: Ike Cialona en Peter Verstegen}

The Corporal who killed Archimedes

With one bold strike
he killed the circles, tangent
and point of intersection of parallels
in infinity.

On penalty
of quartering
he banned numbers
from three up.

Now in Syracuse
he heads a school of philosophers
for another thousand years
and writes

one two
one two
one two
one two

Miroslav Holub (1923-1998)
Uit: Before and After (1960)

Euclides

Gij zijt aan het bestaande tegenstrijdig.
Buiging en ronding om u heen gelegd,
eenmaal uw beeld te buiten, trokken recht
en maakten u aan alles evenwijdig.

Tussen die lijnen werd de tijd ontijdig
en schoof de ruimte uit uw lichaam weg.
Ieder begrip dat nog iets van u zegt,
krijgt doel te veel en middelen te weinig.

Ik kan u niet met Euclides beschrijven,
want de figuur waarmee u congrueert
heeft punten nodig der oneindigheid.

Nochtans moet ge binnen de perken blijven
van het gedicht dat u verdisconteert
in al het wit dat ieder woord omsluit.

Gerrit Achterberg (1905-1962)
Uit: Sneeuwwitje (1949)

Wiegelied van Cape Cod

(voor A.B.)

IV

De verandering van Imperium hangt samen met
klanken, taal, met speekselvorming bij 't spellen,
met de som van hoeken uit Lobatsjevski's wet,
met de groeiende kans dat parallellen
elkaar raken (zoals lengtegraden bij
de noord- of zuidpool).

Joseph Brodsky (1940-1996)
Uit: A Part of Speech (1975)
Fragment; origineel 413 regels
Vertaling: Peter Zeeman

After reading a Child's Guide to Modern Physics

Our eyes prefer to suppose
That a habitable place
Has a geocentric view,
That architects enclose
A quiet Euclidean space:
Exploded myths – but who
Would feel at home astraddle
An ever expanding saddle?

W. H. Auden, (1907-1973)
Fragment, origineel 48 regels

Zwei Striche im Sand, gelesen mit dem Geist

DON RODERIGO Wohin?

DON JUAN Zur Geometrie.

DON RODERIGO Juan, das ist nicht dein Ernst.

DON JUAN Der einzige, der mich verblieben ist nach dieser Nacht. Bedaure mich nicht! Ich bin ein Mann geworden, das ist alles. Ich bin gesund, du siehst es, von Scheitel bis Sohle. Und nüchtern vor Glück, das es vorbei ist wie ein dumpfes Gewitter. Ich reite jetzt in den Morgen hinaus, die klare Luft wird mir schmecken. Was brauche ich sonst? Und wenn ich an einem rauschende Bach komme, werde ich baden, lachend vor Kälte, und meine Hochzeit ist erledigt. Ich fühle mich frei wie noch nie, Roderigo, leer und wach und voll Bedürfnis nach männlicher Geometrie.

DON RODERIGO Geometrie!

DON JUAN Hast du es nie erlebt, das nüchterne Staunen vor einem Wissen, das Stimmt? Zum Beispiel: was ein Kreis ist, das Lautere eines geometrischen Orts. Ich sehne mich nach dem Lauteren, Freund, nach dem genauen; mir graust vor dem Sumpf unserer Stimmungen. Vor einem Kreis oder einem Dreieck habe ich mich noch nie geschämt, nie geekelt. Weißt du, was ein Dreieck ist? Unentrinnbar wie ein Schicksal: es gibt nur eine einzige Figur aus den drei Teilen, die du hast, und die Hoffnung, das Scheinbare unabsehbarer Möglichkeiten, was unser Herz so oft verwirrt, zerfällt wie ein Wahn vor diesen drei Strichen. So und nicht anders! sagt die Geometrie. So und nicht irgendwie! Da hilft kein Schwindel und keine Stimmung, es gibt ein einzige Figur, die sich mit ihrem Namen deckt. Ist das nicht schön? Ich bekenne es, Roderigo, ich habe noch nichts Größeres erlebt als diese Spiel, dem Mond und Sonne gehorchen. Was ist feierlicher als zwei Striche im Sand, zwei Parallelen? Schau an den fernsten Horizont, und es ist nichts an Unendlichkeit; schau auf das weite Meer, es ist Weite, nun ja, und schau in die Milchstraße empor, es ist Raum, daß dir der Verstand verdampft, unausdenkbar, aber es ist nicht das Unendliche, das Sie allein dir zeigen: zwei Striche im Sand, gelesen mit dem Geist..

Ach Roderigo, ich bin voll Liebe, voll Ehrfurcht, nur darum spotte ich. Jenseits des Weihrauchs, dort wo es klar wird und heiter und durchsichtig, beginnen die Offenbarungen; dort gibt es keine Launen, Roderigo, wie in den menschlichen Liebe; was heute gilt, das gilt auch morgen, und wenn ich nicht mehr atme, es gilt ohne mich, ohne euch. Nur die Nüchterne ahnt das Heilige, alles andere ist Geflunker, glaub mir, nicht wert, daß wir uns aufhalten darin.

Er reicht nochmals die Hand. Lebwohl!

DON RODERIGO Und das Mädchen am Teich?

DON JUAN Ein ander wird sie trösten.

Max Frisch (1911-1991)
Uit: Don Juan oder Die Liebe zur Geometrie (1953)
Fragment uit de derde acte

De berg tegenover het paleis

De berg tegenover het paleis van Minos is als een Grieks theater
een tragedie met de rug leunend op een stormachtige helling
in de rijen heel geurige struiken nieuwsgierige olijven
klappen voor de ruïne

Tussen de natuur en het menselijk lot
bestaat geen wezenlijk verband
zeggen dat het gras spot met de catastrofe
is een bedenksel van ontroostbaren en weifelenden

Een bijzonder geval: twee evenwijdige rechten
snijden elkaar zelfs in het oneindige niet

Meer kan men er in eerlijkheid niet van zeggen

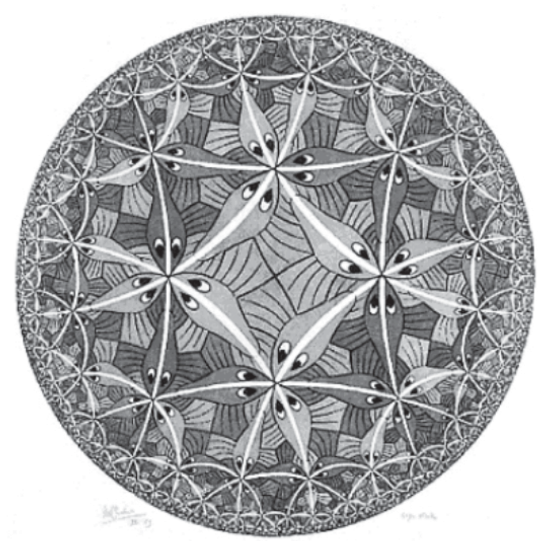
Zbigniew Herbert (1924-1998)
Uit: Inscriptie (1969)
Vertaling: Gerard Rasch

nawoord

Voor Andrew Marvell is het eenvoudig: schuine lijnen snijden elkaar en parallellen doen dat niet. Bijna letterlijk de definitie die we bij Euclides vinden: parallel zijn lijnen die, hoe ver ook voortgezet, geen snijpunt hebben. Hoe gelijkgericht ook, Andrew, het wordt niets.
De Bretonse dichter Eugene Guillevic schreef een serie korte gedichten die steeds beginnen met een eenvoudige meetkundige figuur. Ook bij hem staat evenwijdigheid voor eeuwig op dezelfde afstand blijven. Maar Christian Morgenstern maakt ons - als altijd - vrolijk en gelukkig: het eeuwige komt na tien lichtjaren gaans al in zicht, en hoe.
De korporaal van Holub slaat met een klap het oneindige naar de verdoemenis. De wiskundige afdaling van oneindig via vier (-en-delen) en drie naar de bruutheid der laagste getallen is hier de ruggegraat van het gedicht zelf geworden. Schrijfdatum 1960, dus nog onder het communistisch bewind in Tsjecho-Slowakije. Overigens had Archimedes niets op met snijpunten in het oneindige; dat is allemaal erg on-grieks, maar dit zij Holub vergeven.
Hoe zit het nu echt met die evenwijdigheid? Van Andrew Marvell hebben we de definitie van ‘evenwijdig’ geleerd, van Michael Zeeman krijgen we het vijfde postulaat van Euclides in het eerste couplet aangeboden. Niet helemaal letterlijk; bij Euclides snijden twee lijnen elkaar als de binnenhoeken aan één kant samen minder dan twee rechte hoeken zijn; één van de hoeken kan dan nog wel stomp zijn.
Uit het vijfde postulaat kan afgeleid worden waar Dante in het gesprek in het Paradijs met zijn voorvader Cacciaguida zo zeker van is: dat een driehoek nooit twee stompe hoeken kan

hebben. Zo lag dat in die dagen: de postulaten werden gezien als waarheden waar je niet omheen kon en waarvan je de gevolgen onvoorwaardelijk accepteerde. Maar ‘Wat zeker scheen bleef onbewezen’ lazen we al bij Michael Zeeman. Inderdaad, lang is geprobeerd het vijfde postulaat uit de andere vier af te leiden, maar dat bleek onmogelijk. In de negentiende eeuw grepen wiskundigen dan ook hun kans: ze schiepen zich nieuwe meetkunden, waarin postulaat vijf niet gold en het tegendraads-mysterieuze hiervan heeft dichters van de twintigste eeuw geïnspireerd.
Mogen we bij de punten der oneindigheid van Gerrit Achterberg aan de verdwijnpunten van het perspectief denken, die alleen op tekening of schilderij bestaan, of zullen we meteen voor de vlakke projectieve meetkunde kiezen waar élke lijn élke andere snijdt?
Joseph Brodsky is bij uitzondering direct autobiografisch in ‘Wiegelied van Cape Cod’. Onder andere W.H. Auden zette zich met succes voor Brodsky in, zodat het werkkamp boven de Russische poolcirkel verruild kon worden voor een nieuw imperium, de Engelse taal en een nieuwe meetkunde. Al in het begin van het lange gedicht neemt een de hoek om schietende auto wraak op Euclides. Twee bladzijden later wordt het beeld voortgezet, onvervalste niet-Euclidische meetkunde stapt de poëzie in. De (aard)bol wordt vaak gebruikt om begrip te krijgen voor een meetkunde waarin alle lijnen (op de bol moeten we daar de grootcirkels voor nemen) elkaar snijden en waar je driehoeken hebt met wel drie stompe hoeken. Lobatsjevski is een van de ontdekkers van de niet Euclidische meetkunde; overigens niet van de variant die bij de bol aansluit (dat is de elliptische meetkunde), maar van de wiskundig belangrijker hyperbolische meetkunde, waarin je door een punt buiten een lijn juist talloze parallellen hebt. Auden, lezend in een natuurkundeboek voor kinderen, ontmoet ongewild die laatste meetkunde.
Bij de elliptische meetkunde is de in alle richtingen eendere kromming van een bolopppervlak een mooi beeld, bij de hyperbolische meetkunde moet je denken aan heel andere kromming, meer aan een zadelpunt in de bergen (wandelaars kennen dat als ‘pas’ en wielrenners als ‘col’), daar kan in de voor-achter richting de kromming naar beneden gericht zijn terwijl die in de links-rechts richting naar omhoog is gericht. Een uitdijende cirkel gedraagt zich daar vreemd: de omtrek groeit er meer dan evenredig met de straal, terwijl in de elliptische meetkunde de cirkelomtrek juist minder dan evenredig met de straal van de cirkel groeit. Span met een touw een driehoek in zo’n zadel en ervaar Lobatsjevski’s wet: de volle som

M.C. Escher: Cirkellimiet III (1959)
(© Cordon Art, Baarn - alle rechten voorbehouden)

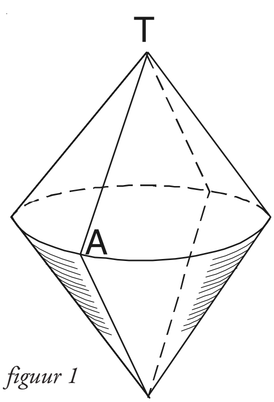


der hoeken is er kleiner dan 180 graden.
De veelvuldigheid van de niet snijdende parallellen is geïllustreerd door Escher. De witte curven van Cirkellimiet III zijn de rechten van het hyperbolische vlak; neem er één in het oog, je vindt gemakkelijk punten in de figuur waar wel drie witte curven doorgaan, die de eerst gekozene niet snijden. Bedenk wel dat het maar een afbeelding is. In het echte hyperbolische vlak zouden al Eschers vissen even groot zijn en dan zou een vlakvulling getekend zijn die in het gewone vlak niet mogelijk is.
Zbigniew Herbert brengt ons terug naar de evenwijdige lijnen die elkaar niet ontmoeten en toch een bijzonder geval zijn. Nu staan ze voor de natuur en het menselijk lot. Meer gaan we daar niet over zeggen!

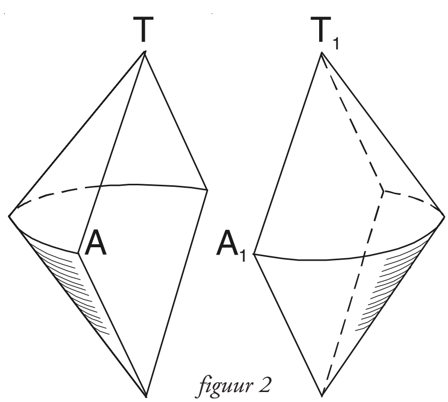
Aad Goddijn

wobbeldingen

De schoonheid van regelmatige mathematische lichamen bekoort vrijwel iedereen. De vijf klassieke platonische lichamen: tetraëder, kubus, octaëder, dodecaëder en icosaëder, het zijn slechts voorbeelden van een bijna eindeloze reeks van mogelijkheden. Op onze Ars et Mathesisdagen staan we altijd weer verwonderd over de rijke vormenwereld die de deelnemers ons voortoveren met hun inventiviteit en gevoel voor schoonheid. Ik kan me moeilijk voorstellen dat de beeldhouwer, die met zogenaamde vrije vormen werkt, ook niet onder de bekoring komt van deze streng mathematisch opgebouwde ruimtelijke figuren. Dit ter inleiding van een artikeltje over een fraaie vorm: het WOBBELDING, dat ik U in twee varianten zal geven en waarvan ik hoop dat U ze zelf zult maken; veel materiaal en tijd kost het niet. Toevallig vond ik ze, alweer een tijdje terug (in het oktobernummer 1999), in twee heel verschillende tijdschriften: Scientific American en Praxis der Mathematik.
Een wobbelding is een lichaam dat in een rechte lijn kan rollen en dat daarbij dan (in tegenstelling tot bijvoorbeeld de bol) ook heen en weer wiebelt.

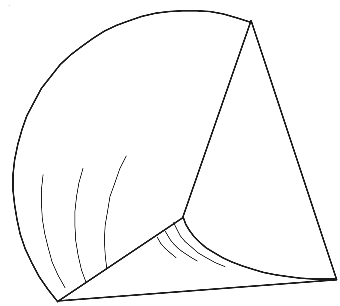


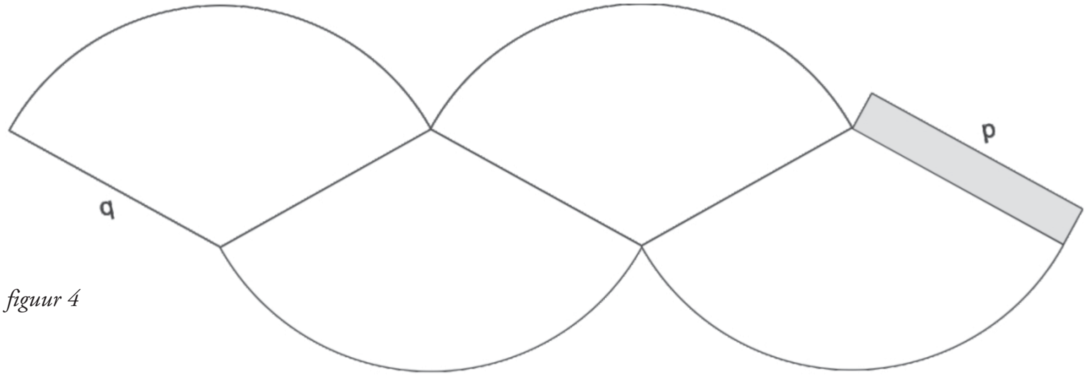
figuur 1



figuur 2

figuur 3





figuur 4

De wobbelbol
In figuur 1 is een dubbelkegel getekend. Als we die doormidden zagen (zoals in figuur 2) en daarna de rechterhelft 90° draaien zodat T_1 met A samenvalt, ontstaat de wobbelbol (figuur 3). Het is niet mogelijk met een tekening of een foto de intrigerende vorm te tonen die zo ontstaat. U kunt er zelf één maken van papier of briefkaartkarton: de uitslag is in figuur 4 gegeven. Maak een fotokopie (eventueel vergroot) en plak het lipje p op de rand q. Als U de figuur eerst vouwt over de aangegeven lijnen gaat dat gemakkelijker.
In hout of metaal uitgevoerd zou het sierlijke ”bolletje” natuurlijk nog beter uitkomen.

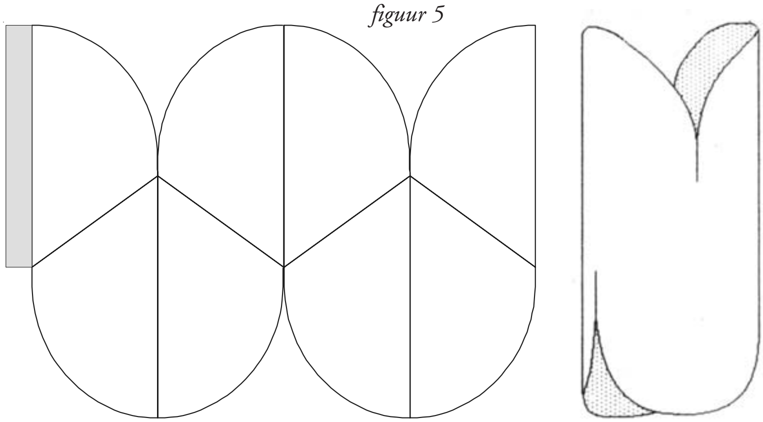
De wiebelaar
Het voorwerp dat (gebed in een dikke mantel van wiskundige afleidingen) in Praxis der Mathematik stond, verschilt niet zo veel van de wobbelbol. Het is alleen wat langwerpiger. In figuur 5 is de uitslag getekend en de vorm die U krijgt als het lipje links aan de rechterkant is vastgeplakt. U zult merken dat het nu noodzakelijk is om de halfcirkelvormige delen (met stukjes plakband) aan elkaar te plakken. De slanke vorm met haar vloeiende overgangen heeft haar eigen bekoring. Overigens wiebelt en rolt het voorwerpje op dezelfde manier als de wobbelbol.

Hans de Rijk

Om het te laten wiebelen en rollen moet het op een hellend vlak (bijvoorbeeld een plank) gelegd worden.

We gaan niet in op allerlei wiskundige aspecten van de wobbelbol. Ik vind het voorwerpje al interessant genoeg zonder deze toevoeging.

figuur 5



een kloof gedicht

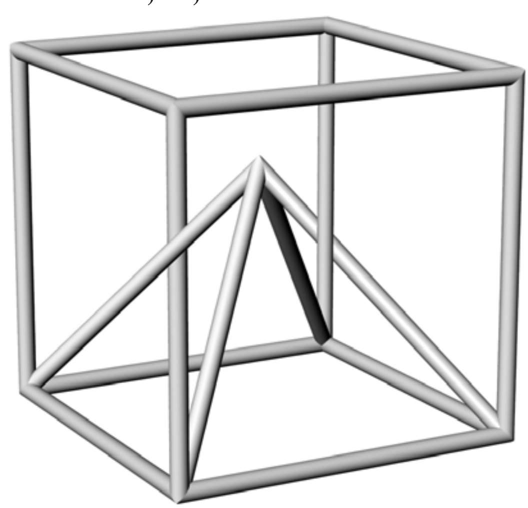
Onder de titel *Wis- en natuurlyriek met chemisch supplement* verscheen een opmerkelijke bundel van de hand van Drs. P. & Marjolein Kool (Nijgh & Van Ditmar 2000, fl 29,90).

Wat voor gedicht? Nee, de beide auteurs spreken de hoop uit 'dat dankzij dit boek de kloof tussen alfa's en bèta's eindelijk gedicht zal worden en dat weldra de eenheid der volkeren een feit zal zijn'. Daar leveren zij een krachtige bijdrage aan door in dichtvorm een aanzienlijk deel van de leerstof van de middelbare school lichtvoetig te behandelen. Wiskundige wetenswaardigheden als cirkelkwadratuur en magisch vierkant, fysische fenomenen als het Doppler-effect en de Wet van Gay-Lussac, scheikundige schatten als lakmoesproef en verwarming door varkensmest – al deze nuttige kennis is hier in literaire stijlbloempjes verpakt, en waar nodig in voetnoten verder toegelicht.
Leraren in de exacte vakken kunnen met dit boekje hun voordeel doen. Dat de snijpunten van hoogtelijnen, zwaartelijnen en middelloodlijnen in een driehoek op één rechte (van Euler) liggen, vergeet je na lezing van het betreffende gedicht nooit meer, zo min als de eigenschappen van de duikklok van Drebbel of de kooi van Faraday. En had u zich ooit gerealiseerd dat een fietsband van Möbius tweemaal zo lang meegaat voor hij versleten is?

De poëtische presentatie van de exacte leerstof is rijk geschakeerd. Gebeeldhouwde sonnetten klinken helder op naast olijke vrolijke olleke-bollekes, en jambische tetrameters worden afgewisseld door een twaalftal elftallen (met rijmschema *abc bcd cda ee*) en door gedichten waarvan het aantal regels per couplet zich voegt naar de decimalen van e (het e-rondeel: 2,7,1,8,2) of van pi (het pi-sonnet: 3,1,4,1,5). Een aardig effect wordt bereikt wanneer formules in metrum en rijm worden opgenomen, zoals deze amfibrachische tetrameters in het gedicht over de laatste stelling van Fermat:

Ruim drie eeuwen heeft het geduurd, die ellende
Van $x^n + y^n$,
$= z^n \; (n>2)$
En menig genie dat de opgave kende -
Hoezeer hij of zij ook probeerde en pende
Kwam nooit tot de uitkomst, en zat er maar mee.

Hilarisch is ook de levensgeschiedenis van de kubus die meent in het verkeerde mathematische lichaam ter wereld gekomen te zijn. Alleen een chirurgische ingreep biedt uitkomst, maar goedkoop is dat niet: de ombouw van kubus tot piramide kost onze transsexueel vier ribben uit zijn lijf!



Een paar gebreken zijn er ook wel te signaleren. Bij de poëtische beschouwing over kansrekening - waaruit blijkt dat er temidden van alle existentiële onzekerheden die ons teisteren slechts één zekerheid is (namelijk dat een boterham met jam altijd met de jam omlaag zal vallen) - was een voetnoot over de Wet van Murphy op zijn plaats geweest. En dat nu juist de GGD gebeld moet worden wanneer iemand bij de confrontatie met het algoritme van Euclides over zijn toeren raakt, vraagt om een voetnoot die de relatie tussen dat algoritme en de Grootste Gemene Deler verheldert. Verder blijkt dat de auteurs nog niet in de gelegenheid zijn geweest kennis te nemen van *De ontstelling van Pythagoras*. Want hoewel de voetnoten vrijwel steeds helder, kort en informatief zijn, worden over Pythagoras, gulden snede en Reeks van Fibonacci de gebruikelijke misvattingen herhaald. Anders dan het boek wil doen geloven was voor Renaissance-kunstenaars de gulden snede geen goede zede, en geen konijn heeft zich bij de teeltkeus ooit iets aangetrokken van het raadseltje van Fibonacci!

In de voetnoten op p. 56 en p. 108 wordt tweemaal, in andere woorden, hetzelfde verschijnsel verklaard: de capillaire werking waardoor vloeistof in een zeer dunne buis omhoog kan klimmen, tegen de door de zwaartekracht geschapen verwachtingen in (‘ ’t is wenselijk dat u dit onderkent / vooral indien u zelf een vloeistof bent’). Dat fenomeen is dan ook in beide gedichten (allebei van Drs. P.) aan de orde. Daarbij is het rijmschema van de tien vierregelige strofen van het laatste gedicht vermeldenswaard: *abcd / bcde / cdef / .... / ghij / hija / ijaa / jaaa*. Ik kan me niet aan de indruk onttrekken dat de capillaire werking hier door de eerste rijmregel wordt nagebootst.

Tenslotte biedt dit boek nog hoop op een leven na de dood, zoals blijkt uit het (tijdelijk) levenseinde van een x-as:

Een x-as, ziek en hoogbejaard,
lag op zijn doodsbed neder
en sprak, berustend en bedaard:
‘Wij zien elkander weder.

Men heeft mij immers steeds beloofd
dat ik, na het cremeren,
wanneer het vuur zal zijn gedoofd,
als as zal wederkeren.’

Albert van der Schoot

In de vorige Arthesis werd het boekje “**digitale grafiek - een hele kunst**” (toen bijna uitverkocht) besproken. Inmiddels is van deze uitgave een (aangevulde) tweede druk verschenen, dit maal onder auspiciën van de **Digitale Grafiek Groep Noord Nederland** ofwel **D2G2N**. In D2G2N bundelen Ed Ubels, Cees Swart en Ineke Lambers - alle drie reeds geruime tijd actief als digitaal graficus - hun krachten om de bekendheid met en acceptatie van digitale grafiek als volwaardige grafische kunstvorm te bevorderen. Voor meer informatie kan men terecht op de website van D2G2N (http://beam.to/d2g2n) of bij het D2G2N-secretariaat (p/a Ineke Lambers, Ontginningsweg 1, 9865 XA Opende; tel. 0594-659279, email: ilambers@wxs.nl). Daar is dus ook het boekje te bestellen (fl 25 plus fl 3,50 verzendkosten).

ARS ET MATHESIS

De Stichting ARS ET MATHESIS (opgericht in 1983) heeft tot doel de belangstelling te bevorderen voor kunst die zijn inspiratie vindt in de wiskunde. Dit gebeurt onder meer door tentoonstellingen, publicatie van boeken en artikelen, het uitgeven van het blad “ARTHESIS” en het organiseren van een jaarlijkse ARS ET MATHESIS dag (diverse voordrachten gecombineerd met een dag-expositie waar werk van velerlei exposanten is te bekijken).

donateurs: Donateurs (minimum donatie fl 30,- per jaar) ontvangen Arthesis en hebben gratis of tegen gereduceerd tarief toegang tot de jaarlijkse Ars et Mathesis-dag. Bijdragen kunnen worden overgemaakt op bankrekening nummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn; s.v.p. met duidelijke vermelding van eigen naam en adres, en van “Ars et Mathesis”.

inlichtingen: H.P. van Tongeren (voorzitter)
Beverodelaan 205, 6952 JH Dieren
tel. 0313-413307; email: toosenhenk@nl.packardbell.org.

secretariaat: A. Goddijn
p/a Freudenthal Instituut,Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
email: A.Goddijn@fi.uu.nl

aanmelding als donateur, adreswijzigingen, bestellingen:
Ineke Lambers
Ontginningsweg 1, 9865 XA Opende
tel. 0594-659279; email: ilambers@wxs.nl.

Internet: *http://www.nvvw.nl/ArsetMathesis.html.*

Ars et Mathesis producten

verkrijgbaar: Sangaku-kwartet [sk], Sangaku-poster A3 of A4 [sp], Sangaku-leliekaart [slk], Sangaku-lelieposter A3 of A4 [slp]: nederlands of engels [n of e]; A&M poster A3 of A4 [amp], A&M knoop-kaart [amkk], A&M letterkaarten [amlk], losse nummers Arthesis vanaf jaargang 14 [art/jaargang/nr].

prijzen: kaarten (per set van 4) fl 10 , poster A4 formaat fl 5, poster A3 formaat fl 12,50, nummers Arthesis fl 7,50; A3 posters plus fl 5 voor toezending, overig plus fl 2,50 voor toezending.

bestelwijze: door overmaken van het totaalbedrag op gironr 1315269 t.n.v. J.J. Lambers-Hacquebard, onder vermelding van: “AM-bestelling”, gewenste aantallen en soorten producten en het adres waar de bestelling naar toe moet worden gezonden. Gebruik s.v.p. de hierboven tussen [ ] vermelde codes.