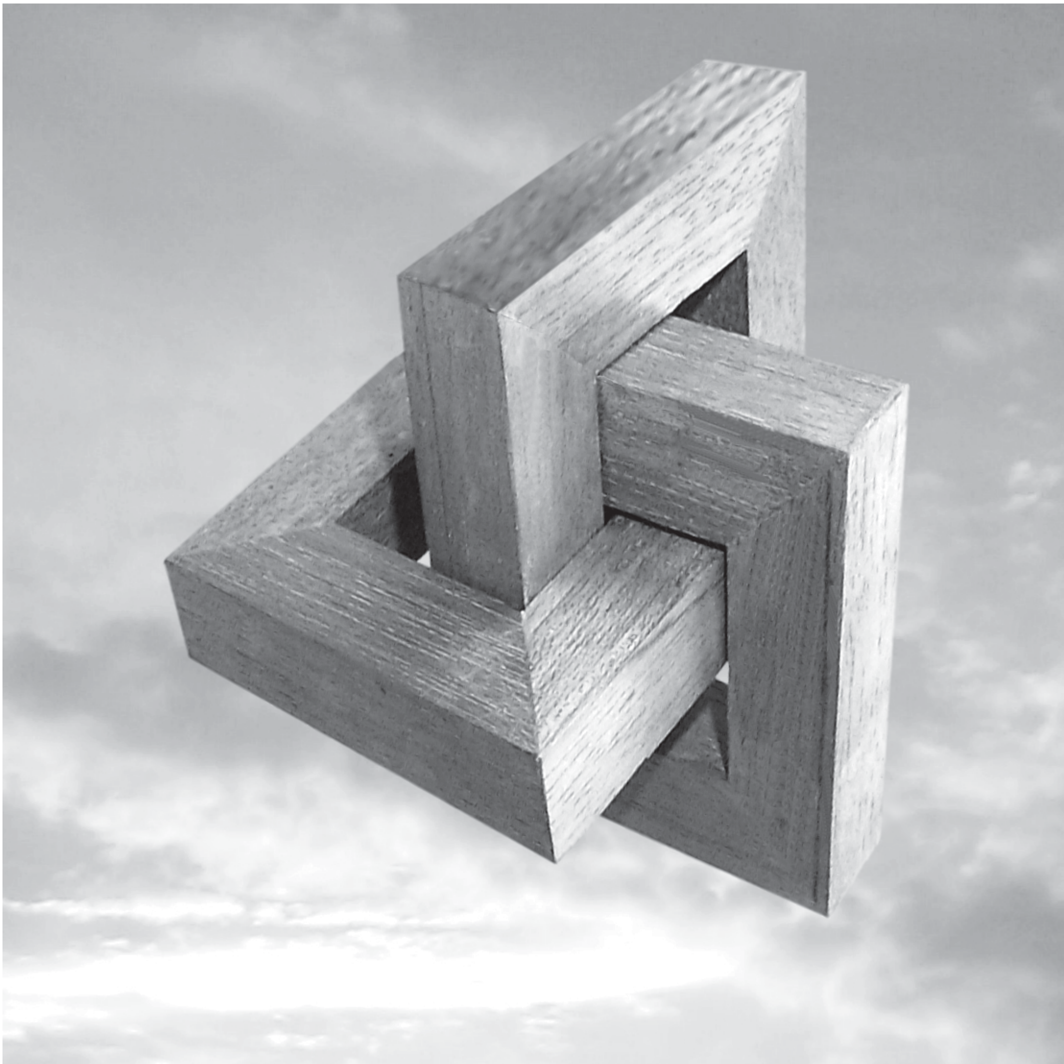
ARTHESIS

jaargang 14, nummer 1



een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis

inhoud

jaargang 14, nummer 1

ARTHESIS

Arthesis is een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis en wordt gratis toegezonden aan de donateurs van de Stichting. Losse nummers fl 7,50 (bestelwijze: zie kader op pag. 19).

redactie Albert van der Schoot
Rinus Roelofs
Ineke Lambers (vormgeving)

redactie-adres Albert van der Schoot,
't Ven 24, 1115 HB Duivendrecht
email: schoot@hum.uva.nl

inzenden kopij
Bij voorkeur in digitale vorm : tekst als WP- of Word-bestand; illustraties in de vorm van een goede foto of duidelijke tekening (indien mogelijk het origineel, liever geen scan of fotokopie), of digitaal aangemaakt (vectortekening in CDR of AI format; bitmaps als Jpeg of Tiff bestand in voldoende hoge resolutie).

ARTHESIS in een nieuwe jas

Een nieuwe jaargang en een nieuwe *Arthesis*. De beginletter heeft zich losgemaakt van de titel en heeft het luchtruim gekozen. En daar zweeft hij nu, beschikbaar als bouwsteen voor Onmogelijke Luchtkastelen, of voor andere producten van de artistiek/mathematische verbeeldingskracht. De titel voelde zich aanvankelijk verweesd, maar is tenslotte toch rechtop gaan staan, om resoluut toezicht te houden op wat er zoal het blad binnenkomt.

Dat is meer dan in de oude uitvoering. In de nieuwe vormgeving zoals die door Ineke Lambers is uitgepuzzeld, is *Arthesis* wat kleiner geworden van formaat, maar het aantal pagina's (en daarmee de totale inhoud) is uitgebreid. U kunt deze vernieuwde Arthesis twee maal per jaar op de deurmat verwachten. Daarnaast wordt u elk jaar met een aparte mailing geïnformeerd over onze najaarsactiviteit.
De datum voor de **Ars et Mathesis-dag 2000** kunt u vast noteren:

11 november 2000
CSB-gebouw,
Kromme Nieuwe Gracht 39, Utrecht.

De grotere omvang biedt ruimte voor een afwisselende inhoud. U had de oplossing van de Sangaku-vraagstukken nog te goed. Het Sangaku-denken lijkt, misschien onder invloed van het bezoek van de Japanse keizer, wortel te schieten: de Sangaku is inmiddels vertaald naar het poldermodel door Hans de Rijk, die misschien wel meer bijdragen aan *Arthesis* op zijn naam heeft staan dan enige andere auteur. Over hemzelf komt u meer te weten dankzij het interview dat Zsófia Ruttkay en Rinus Roelofs met hem hadden. Het eerste deel daarvan is in dit Arthesis-nummer opgenomen.

Letterlijk en figuurlijk veelzijdig is de bijdrage van Rinus Roelofs over twaalfvlakken. Zijn artikel loopt parallel aan de mini-expositie die op dit moment de paar kubieke meter expositieruimte siert in de vitrine die *Ars et Mathesis* sinds mei van dit jaar naar eigen inzicht mag vullen bij het Amsterdamse Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI). Om de paar maanden wordt een nieuwe expositie ingericht.

We zijn van plan in de komende nummers telkens aandacht te besteden aan een kunstenaar die een eigen invulling geeft aan het breukvlak van *ars* en *mathesis*. Deze keer is dat Jan Andriesse: Albert van der Schoot besteedt aandacht aan zijn expositie in het Dordrechts Museum. Ook zullen we door korte recensies de aandacht vestigen op literatuur die voedsel geeft aan onze speciale belangstellingssfeer.

Tenslotte hoopt de redactie zeer dat de nieuwe vormgeving meer lezers zal inspireren ook zelf een korte bijdrage aan het blad te leveren of te attenderen op relevante literatuur en exposities. U kunt uw teksten ter beoordeling inzenden aan het redactie-adres zoals vermeld in het colofon op pagina 2.

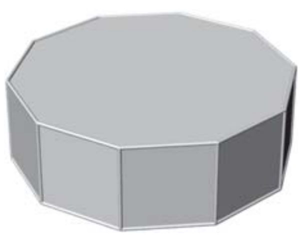
Albert van der Schoot

twaalfvlakken - een kleine expositie

Bij twaalfvlakken (met 12 regelmatige veelhoeken) denken we al gauw aan het regelmatig 12-vlak, opgebouwd met 12 regelmatige vijfhoeken, één van de vijf Platonische veelvlakken (fig. 1).

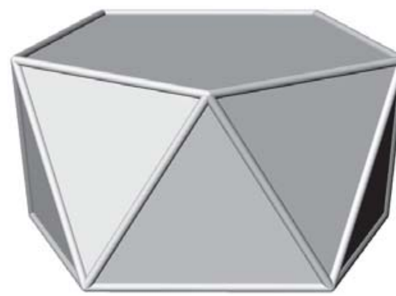
figuur 1

Maar ook in de reeks Archimedische, halfregelmatige veelvlakken komen we twee 12-vlakken tegen: het 10-zijdig prisma, bestaande uit 2 regelmatige 10-hoeken en 10 vierkanten (fig. 2) en het vijfzijdig antiprisma bestaande uit 2 regelmatige vijfhoeken en 10 gelijkzijdige driehoeken (fig. 3).



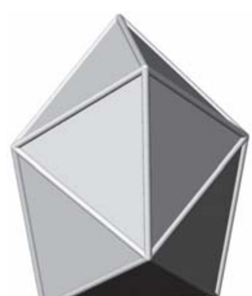
figuur 2

De vraag kwam nu op of je met behulp van regelmatige veelhoeken nog meer 12-vlakken zou kunnen samenstellen. Een 12-vlak is dan gedefinieerd als een lichaam, begrensd door 12 veelhoeken (vlakken), die twee aan twee aansluiten langs gemeenschappelijke zijden (ribben), waarvan er steeds drie of meer samenkomen in gemeenschappelijke hoekpunten. De vlakken zijn hier steeds regelmatige veelhoeken, waarbij we de stervormige veelhoeken (voorlopig) buiten beschouwing zullen laten. Toen nog in de veronderstelling dat dit een overzichtelijk, klein aantal zou zijn, waarvan het wellicht aardig zou zijn om er een serie modellen van te maken, begon ik aan iets dat veel uitgebreider en interessanter bleek te zijn dan ik aanvankelijk vermoedde.

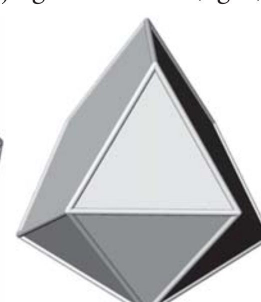


figuur 3

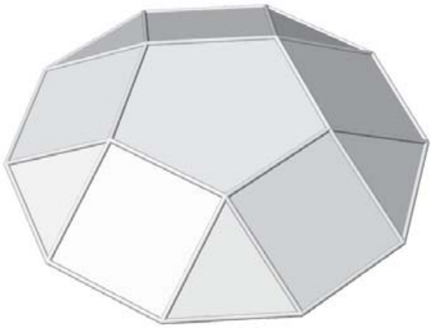
De eerste aanvulling kwam uit de serie zogenaamde Johnson-veelvlakken: dit zijn alle convexe (zeg maar “bolvormige”) veelvlakken, buiten de Platonische en de Archimedische. In deze serie van 92 figuren bleken nog eens vier 12-vlakken te zitten. Eén hiervan bestaat uit uitsluitend gelijkzijdige driehoeken (fig. 4).



figuur 4

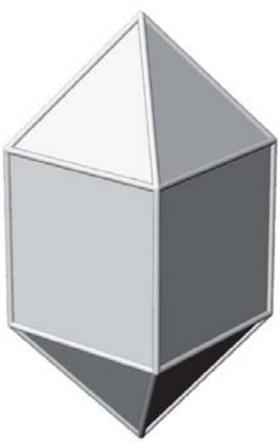


figuur 5



figuur 6

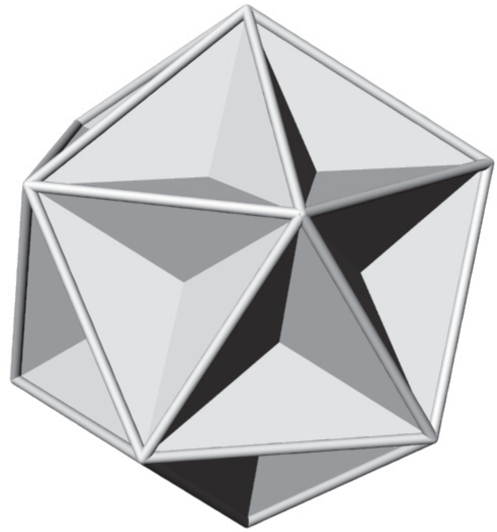
Van de overige drie zijn er twee die te zien zijn als deel van een bekend veelvlak: figuur 5 is een deel van het regelmatig 20-vlak, figuur 6 is een deel van een Archimedisch veelvlak (de romben-icosi-dodecaeder). De vierde is te zien als een samenstelling van een kubus met 2 vierzijdige piramides (fig. 7).



figuur 7

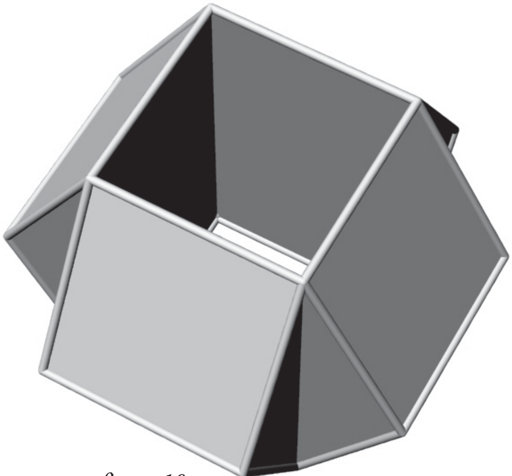
En echt interessant wordt het wanneer we verder kijken in de serie van de uniforme veelvlakken. Wanneer we toestaan dat vlakken elkaar mogen snijden, dan kunnen we de serie regelmatige en halfregelmatige veelvlakken uitbreiden tot de zogenaamde uniforme veelvlakken. In deze reeks vinden we wederom een tweetal 12-vlakken. De eerste bestaat weer uit 12 regelmatige vijfhoeken en wordt de grote dodecahedron genoemd (fig. 8); de andere bestaat uit 8 gelijkzijdige driehoeken en 4 elkaar snijdende regelmatige zeshoeken (fig. 9).

Bij onze verdere zoektocht komen we dan een aantal bijzondere veelvlakken tegen. Zo blijkt het mogelijk om met 12 regelmatige veelhoeken een veelvlak samen te stellen dat meer op een torus lijkt dan op een bol: een ringvormig veelvlak.



figuur 8

figuur 9



figuur 10

In figuur 10 zien we een veelvlak bestaande uit 8 vierkanten en 4 elkaar snijdende zeshoeken, met daarbinnen duidelijk een gat.

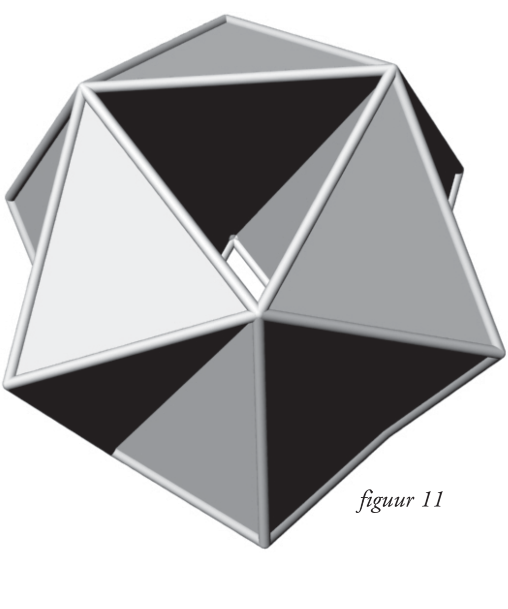
Voor normale, "bolvormige" veelvlakken kennen we de formule van Euler, welke zegt: het aantal vlakken (V) + het aantal hoekpunten (H) van een veelvlak is gelijk aan het aantal ribben (R) + 2.

Kort gezegd: V + H = R + 2 of: V + H – R = 2.

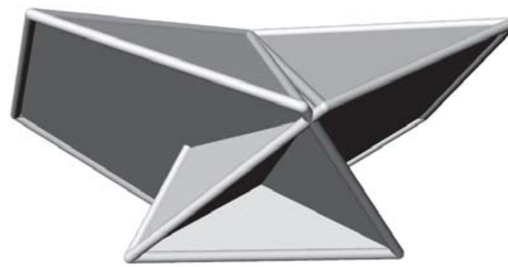
Wanneer we deze relatie bekijken voor het ringvormige veelvlak van figuur 10 komen we tot: aantal vlakken=12, aantal hoekpunten=16 en aantal ribben=28.

Hier is dus V + H – R = 12 + 16 – 28 = 0, hetgeen overeen blijkt te komen met de Euler formule voor een torus-oppervlak.

Ook met 6 regelmatige vijfhoeken en 6 gelijkzijdige driehoeken is een ringvormig 12-vlak samen te stellen (fig. 11) en ook voor dit veelvlak is V + H – R = 12 + 12 – 24 = 0.



figuur 11



figuur 12

De voorlopige lijst bevat inmiddels meer dan 50 12-vlakken, waaronder bijvoorbeeld een aantal met verborgen vlakken: van het 12-vlak zijn dan slechts 10 vlakken aan de buitenkant zichtbaar, de overige 2 zitten binnenin. Figuur 12 laat zien dat dit tevens tot bijzondere vormen kan leiden, welke niet zo direct als veelvlak worden herkend.

In het Centrum voor Wiskunde en Informatica te Amsterdam is een kleine expositie ingericht rond de 12-vlakken. In de vitrine in de ontvangsthal zijn o.a. twintig modellen opgesteld. Deze vitrine zal in de toekomst door Ars en Mathesis worden gebruikt voor wisselende exposities met werk van mensen die zich in het boeiende gebied tussen kunst en wiskunde bewegen.

Rinus Roelofs

een man met zes pseudoniemen

Bruno Ernst is bekend, ook in het buitenland, als de auteur van meerdere boeken over onmogelijke figuren[3], en over Escher[7]. Voor mij, een nieuwkomer naar Nederland, was het een aangename verrassing om nog meer boeken van hem te ontdekken, zoals het prachtige Bomen van Pythagoras[4], en ten slotte om te beseffen dat de aardige heer met grijze haren en fonkelende, nieuwsgierige ogen die meerdere toespraken hield op de Ars et Mathesis-dagen, Bruno Ernst zelf was. Zijn identiteit was niet vanzelfsprekend duidelijk doordat zijn bescheidenheid niet in verhouding stond tot zijn grote bekendheid en oeuvre, noch hield hij zijn inleidingen onder de beroemdste van zijn pseudoniemen, maar gewoon als Hans de Rijk.

Zijn andere vijf personages kende ik niet totdat ik mij aansloot bij het bestuur van de Stichting Ars en Mathesis, waarvan Bruno Ernst een van de oprichters en drijvende krachten is geweest sinds 1983. Kruimels van de discussies tijdens de bijeenkomsten van het bestuur maakten mij nieuwsgierig naar zijn rol bij Ars et Mathesis, zijn ontdekkingen over werken van Escher, naar zijn andere achter al die pseudoniemen 'verborgen' activiteiten, naar zijn visie op het beoefenen van wiskunde.
Toen bleek dat er tot nu toe geen uitgebreid interview met hem gemaakt is, stemde hij toe, tot mijn grote vreugde, om door mij geïnterviewd te worden. Samen met wiskundig kunstenaar Rinus Roelofs bracht ik twee aangename middagen door in de lichte flat van Hans de Rijk, op de zeventiende verdieping met zicht op heel Utrecht. (Hij is een groot liefhebber van zijn stad, en ook over haar oude straatnamen heeft hij een boekje geschreven.) We luisterden naar het levendige verslag van zijn herinneringen, dat verweven was met de ideeën die hem nu bezighouden. Zoals de zes pseudoniemen aangeven, die hij bedacht telkens als hij in een nieuw vakgebied wilde publiceren, zou men wel meerdere interviews met hem kunnen maken. Wij besloten om twee verslagen samen te stellen aan de hand van onze gesprekken: dit interview met Hans de Rijk alias Bruno Ernst en een paar van zijn andere verpersoonlijkingen, vooral over wiskunde; en een tweede (te lezen in een komend Arthesis nummer) over kunst en zijn kunstverzameling.

Wiskunde als spel

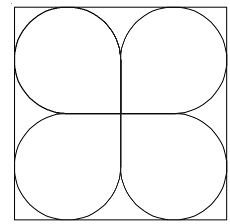
Het is niet goed mogelijk om de twee interesses van Hans de Rijk, wiskunde en kunst, van elkaar te scheiden.
Een lezer van 'The Magic Mirror of Escher' schrijft op www.amazon.com: "*The greatness of this book on the work of M.C. Escher is that it shows how he worked up his ideas for various pieces. It also gives a thorough explanation of his thought and design process.*"
Denkproces, de geboorte van een idee, een verklaring - deze uitdrukkingen keren meermalen terug in ons gesprek. Dat is niet verrassend, aangezien ze de leidraad vormen van de lezingen van Bruno Ernst.

Deze ideeën spelen ook een belangrijke rol in een bescheiden ogend en niet al te bekend boekje[6], dat hij schreef bij het TV-programma 'Kegelsneden' in de Teleac serie 'Levende wiskunde' in 1969. Het onderwerp kan moeilijk modern worden genoemd, en de meeste mensen zouden hierbij alleen maar aan bepaalde formules herinnerd worden. Maar als je die formules zelf zou willen opstellen, wordt het een spannende uitdaging. Bruno Ernst zegt in de inleiding tot de cursus: *"De bedoeling is niet de cursist een afgerond stuk wiskunde voor te schotelen. Aan de hand van deze stof willen wij de wiskundige werk- en denkwijze illustreren."* Voor de auteur *"blijft het beoefenen van wiskunde het karakter van een spel behouden."* Hij citeert 'Homo ludens' van Huizinga: *"Spel is een vrijwillige bezigheid, die binnen vastgestelde grenzen van tijd en plaats wordt verricht, naar vrijwillig aanvaarde, doch volstrekt bindende regels, met haar doel in zichzelf, begeleid door een gevoel van spanning en vreugde en door een besef van 'anders zijn' dat het gewone leven."*
Het boekje van meer dan 70 bladzijden geeft de lezer de ervaring van een spannende ontdekking van de wereld van kegelsneden. Het werpt licht op de intrigerende connecties tussen de kegelsneden onderling en met bekende vraagstukken als "het brengen van water langs de kortste weg uit de rivier naar de koe", en op toepassingen in het dagelijkse leven zoals verrekijkers of de vorm van het hoofdplein van Stockholm. Hoe traditioneel het onderwerp ook mag zijn, men komt een echte verrassing tegen: een elegant en verrassend eenvoudig bewijs voor een verband tussen twee definities van de ellips - een verzameling van punten met een constante som van de afstand tot twee andere punten, en de snijlijn van een bepaald soort vlak en een kegel. Dit bewijs door de Belgische ingenieur Dandelin maakt Ernst zelfs na 30 jaar nog opgewekt: *"Zoiets moois heb je nog nooit gezien - eenvoud en schoonheid".*

Door de vraag of het onderwerp van kegelsneden ook vóór het ontstaan van het boek al bijzonder was voor Bruno Ernst moet hij lachen: *"Nee, helemaal niet! In feite heb ik het boek in één nacht geschreven. Het programma moest eerder dan gepland worden uitgezonden, en mijn inlevertermijn kwam dichterbij. Omdat ik erop had gerekend dat ik nog een week had om het boek te schrijven, was ik er nog helemaal niet aan begonnen. Ik wist natuurlijk waarover ik moest gaan schrijven, omdat wij het onderwerp van het programma zorgvuldig met Van der Blij hadden voorbereid. Maar ik moest alle opgaven en oplossingen bedenken, en alles nog opschrijven. Ik weet niet hoe, maar het lukte. Nu zou ik het niet meer kunnen herhalen."*
Op onze vraag *Hoe komt het dat u juist naar zo'n schitterend bewijs zocht, terwijl er veel meer in omloop waren? Was u de geschiedenis van de stelling aan het achterhalen?* komt als antwoord:

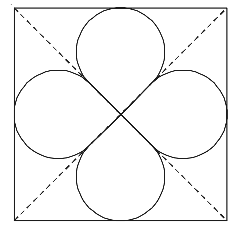
sangaku uit polderland: het klavertje-vier

In ons land komen zo'n 20 verschillende klavers voor. De bekendste is de Witte Klaver. De bladsteel is onvertakt en draagt meestal 3 blaadjes. Soms zit er wel eens één bij die 4 blaadjes draagt; omdat dat zo zelden voorkomt wordt het vinden van een klavertje-vier geassocieerd met geluk. Hier maken we een link met de meetkunde. In figuur 1 zijn vier gelijke cirkelbogen binnen een vierkant getekend. Het ziet er nogal plomp en onnatuurlijk uit en wiskundig is er weinig aan te beleven. Zo is de oppervlakte van dit klavertje-vier $(4 \times \frac{3}{4}\pi r^2+4r^2$, waarin de zijde van het vierkant gelijk is aan $4r$) nog wel uit het hoofd te berekenen. In figuur 2 ziet het klavertje-vier er aantrekkelijker uit. Hier zijn de diagonalen van het vierkant getekend en ingeschreven cirkels in de vier driehoeken aangebracht. De vraag is: hoe groot is de oppervlakte van de blaadjes als de zijde van het vierkant gelijk is aan a. Dit blijkt een aardige puzzel. Wie geen zin heeft in puzzelen vindt verderop de oplossing. *Bruno Ernst*



figuur 1

figuur 2



"Nee, tenminste niet op een systematische manier. Maar als iets me interesseerde, dan ging ik me daarin verdiepen. Ik kon me altijd heel snel in nieuwe zaken inwerken tot waar mijn vermogens gingen en tot waar de wereld het wist. En dat kwam gewoon doordat ik er altijd al een sterke hekel aan had om zelf bezig te zijn met iets wat anderen al wisten of hadden uitgezocht."

eerste inspiraties

De karakteristieke eigenschappen van de latere Bruno Ernst waren al in Hans de Rijk aanwezig toen hij naar school ging. Hij begon tamelijk laat met schrijven, omdat hij de gebruikelijke opstellen op school niet interessant genoeg vond. Een leraar op de opleiding voor onderwijzer pakte het anders aan en gaf bijvoorbeeld als opgave een spel uit te leggen aan een denkbeeldige bezoeker van Mars. Hierin vond hij een uitdaging: om regels te formuleren, mogelijke situaties en strategieën uit te leggen, en anderen te leren genieten van het spel. Met gemak schreef hij bladzijden vol en werd snel bekend vanwege zijn heldere stijl.

Met wiskunde verliep het ook zo. Op de Mulo raakte hij zeer teleurgesteld toen hij er achter kwam dat de gebruikelijke oefeningen met sommen niet alleen al lang opgelost, maar ook heel eenvoudig waren en iedereen ze kon maken. Waarom zou hij ze dan ook moeten máken? *"Ik begon mij pas meer voor de meetkunde en de wiskunde te interesseren toen ik op school met de stelling van Pythagoras kennis maakte, want dat vond ik toch wel heel wonderbaarlijk. Die houding heb ik altijd nog. Ik ga nooit zitten puzzelen aan opgaven waarvan ik weet: ze zijn al opgelost! Dingen die nog niet gevonden zijn, daar wil ik nog best mijn tijd aan besteden."*

Met Pythagoras gebeurt dat nog steeds. De stelling is bewezen, maar hoeveel verschillende bewijzen bestaan er? Bruno Ernst is bezig een boek samen te stellen met de mooiste. Hij is niet alleen een selectie aan het maken uit de talloze bestaande bewijzen, maar levert ook nieuwe eigen bewijzen erbij en kijkt scherp en kritisch of een 'lelijk' bewijs vereenvoudigd kan worden, zodat het eleganter en begrijpelijker wordt. Hij haalt een paar eigen aantekeningen van zijn studeerkamer en gaat onmiddellijk vol enthousiasme vertellen wat hij gevonden heeft: een bekende, het ogenschijnlijk ingewikkelde bewijs door Epstein, is op slechts een paar eenvoudige waarnemingen gebouwd en kan veel korter uitgevoerd worden. In deze vorm is het bewijs nu een kandidaat voor zijn selectie van de interessantste.

Maar zijn grootste liefde is, moeilijk te geloven, natuurkunde. Het begon met een misverstand toen hij 8 was. Hij raakte in de ban van een boek 'over de natuur' van één van zijn klasgenoten *"met allemaal beesten erin, panters, leeuwen en zo"*, dus hij wilde zelf ook thuis graag zo'n 'natuurkundeboek' hebben. En zijn vader heeft er één van de plank gepakt: het 'Handboek der Natuurkunde' uit 1865. *"En het gekke is, het ging mij om die tijgers en die leeuwen, die vond ik spannend; maar ik had hier de eerste bladzijden gelezen:* (hij leest voor uit het oude boek, dat nu ook op tafel ligt) *'als er op een plaats iets is, kan er op diezelfde plaats niet iets anders zijn.' Die raakten een snaar bij mij, want dit vond ik meteen verschrikkelijk spannend. Ik vond die een beetje axiomatische beginselen van de natuurkunde zo interessant! Kennelijk zat er iets al in mij, want anders kan je nooit in plaats van die leeuwen je met zoiets saais inlaten!"* Al op zijn negende schreef hij zijn eerste 'boek' (vier blaadjes uit een schrift), getiteld 'Het maken van gassen'. Met de bewondering van een schooljongen vertelt Hans de Rijk hoe hij in de vierde klas van zijn onderwijzer hoorde dat als je waterstof met zuurstof verbrandde, er water ontstond.

zonnewijzers, handschriften en meer

Bruno Ernst is een der oprichters van de Zonnewijzer Kring, een vereniging die nu ca. 200 leden telt. Hij schreef over deze materie twee boeken[5, 8] en een groot aantal artikelen in het Bulletin van de Zonnewijzerkring. Ook daar lagen zijn interesses bij het nog steeds onbekende. Zijn belangrijkste ontdekking was een wiskundig ordeningsprincipe van alle bestaande en nog niet ontdekte zonnewijzers en zonnekompassen. Daarmee ontdekte hij enige nieuwe zonnewijzerfamilies.

Hans de Rijk heeft niet alleen naar de wiskunde van zonnewijzers gekeken, maar ook naar die van handschrift. *"Op het gebied van handschrift heb ik een systeem ontworpen om de verschillende bewegingen zo ver uit te splitsen, dat ik met 10 tekentjes, door die gewoon achter elkaar te benoemen, een heel handschrift kan reconstrueren."* Hij beoefent ook kalligrafie, met uniek versierde brieven als bewijs van kunde. Zijn interesse in handschrift reikte verder dan de wiskundige aspecten ervan. Onder weer een ander pseudoniem, Ben Engelhart, publiceerde hij werken over grafologie en schrift[1, 2]. Als Ben Elshout schreef hij over fotografie en film. Alles bij elkaar heeft hij meer dan 250 werken gepubliceerd over een wijd spectrum aan onderwerpen en eventuele mede-auteurs. De oplagen variëren, van een enkel getypt exemplaar van een natuurkundig werk als materiaal voor zijn lesprogramma op school, tot boeken die

in meer dan een dozijn talen vertaald zijn.
Hij vindt de uiterlijke vorm van een boek zeer fascinerend en drukt daar graag zijn persoonlijke stempel op. Hij heeft miniatuur boeken uitgegeven en is een praktiserend boekbinder. Ook op dit terrein zoekt hij weer uitdagingen: hoe klein kan een boek gemaakt worden? Zijn resultaat: ongeveer één centimeter hoog. Hij is derhalve niet alleen een denker en boekenwurm, maar zeker ook een ambachtsman. Naast boekbinder op professioneel niveau (te oordelen naar de resultaten), is hij een geslaagd pottenbakker, juwelier en steenhouwer. Tot zijn spijt is hij de kunst van het glasblazen niet machtig geworden. En een nog onvervulde droomwens is een viool te bouwen...

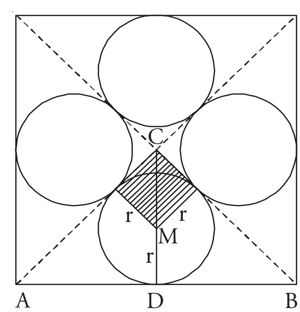
Zsófia Ruttkay

referenties:

1. *B. Engelhart: Calligrafie, Wolters-Noordhoff, Groningen, MCMLXVI.*
2. *B. Engelhart, J. W. Klein: 50 eeuwen schrift, Aramith, Amsterdam, 1988.*
3. *Bruno Ernst: Avonturen met onmogelijke fi guren, Aramith, Amsterdam, 1985.*
4. *Bruno Ernst: Bomen van Pythagoras, Aramith, Amsterdam, 1985.*
5. *Bruno Ernst: 25 eeuwen tijdmeting, Aramith, Amsterdam, 1988.*
6. *Bruno Ernst: Levende wiskunde, Teleac, Delft, 1969.*
7. *Bruno Ernst: De toverspiegel van M.C. Escher, Tachen, Keulen, 1994.*
8. *Bruno Ernst: De zon als klok, 1983.*

oplossing van het klavertje-vier

In figuur 3 zijn de cirkels volledig getekend binnen het vierkant met zijde *a*. Voor de berekening gebruiken we alleen het onderste deel van het vierkant. De cirkel heeft een straal *r* en we proberen eerst *r* uit te drukken in *a*. Trek *CD* door het middelpunt van de cirkel en ook twee stralen naar de raakpunten van de cirkel met *AC* en *BC*. Beide stralen staan ook loodrecht op *AC* en *BC*. In het gearceerde vierkant dat zo ontstaat is $CM = r\sqrt{2}$ en CD is dus $r\sqrt{2} + r$. Maar $CD = AD = DB = \frac{1}{2}a$. Dus $r\sqrt{2} + r = \frac{1}{2}a$.
Daaruit volgt $r = \dfrac{a}{2(\sqrt{2}+1)}$.



figuur 3

De oppervlakte van het blaadje is de oppervlakte van het vierkant plus ¾ van de oppervlakte van de cirkel. Dus: $r^2 + \frac{3}{4}\pi r^2 = r^2(1 + \frac{3}{4}\pi)$. Vullen we de waarde van *r* die we hierboven vonden in dan krijgen we: oppervlakte blaadje = $\dfrac{a^2}{4(\sqrt{2}+1)^2}(1 + \frac{3}{4}\pi) = \dfrac{a^2(1+\frac{3}{4}\pi)}{4(3+2\sqrt{2})}$.

De oppervlakte van het hele klavertje is 4 maal zo groot, dus: $\dfrac{a^2(1+\frac{3}{4}\pi)}{3+2\sqrt{2}}$.

Bruno Ernst

Een spectrum van curven

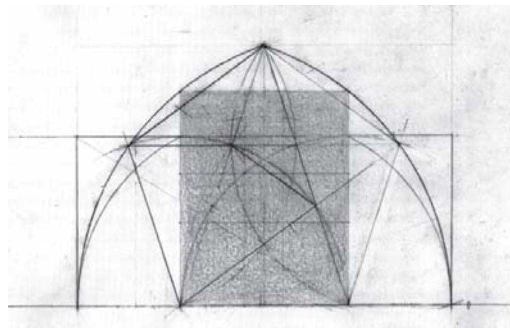
Een artheticus die tot nog toe een beetje aan onze aandacht is ontsnapt is de Amsterdamse schilder Jan Andriesse, van wie tot 18 juni een overzichtstentoonstelling loopt in het Dordrechts Museum. Die is weliswaar al voorbij wanneer u deze *Arthesis* leest, maar gelukkig is er voorzien in een fraai uitgevoerde catalogus, die niet te versmaden afbeeldingen en artikelen bevat voor wie geïnteresseerd is in verrassende relaties tussen wiskunde en kunst.

Op zulke relaties opent Jan Andriesse weer een geheel ander perspectief dan de kunstenaars die werken in de traditie van Escher. Ik durf hem in *Arthesis* nauwelijks aan te halen, maar eigenlijk houdt Andriesse niet zo van Escher. Na het zien van de tentoonstelling wordt duidelijk waarom dat zo is: terwijl de traditie van Escher zich voor een groot deel bezighoudt met vlak*vulling*, lijkt het wel alsof Andriesse al zijn tijd er aan besteedt om een vlak zo *leeg* mogelijk te krijgen. Maar wat er dan overblijft, dat moet er ook zijn: in minimalistische afbeeldingen zien we een kernachtige wijze om een wiskundig verschijnsel vorm te geven. Niet als formule, niet als bewijs, maar als beeld.

Er is nog een reden waarom Andriesse een andere kant op is gegaan dan de volgelingen van Escher. Veel van de structuren die hem interesseren zijn niet zomaar verrassende vormen, maar hangen samen met verschijnselen in de natuur: licht, zwaartekracht, water, weersgesteldheid, en de wijze waarop zulke verschijnselen op elkaar inwerken.
Het merendeel van zijn schilderijen is te rangschikken volgens clusters, waarbinnen zulke thema's nader worden onderzocht. Zo is er een cluster *caryatiden*, waarin de zwaartekracht tot het uiterste wordt gereduceerd. Er is een cluster *the river below*, dat een zeer gestileerde blik biedt op de loop van een rivier onder verschillende weersomstandigheden. In de verschillende verzamelingen *waterstudies* worden traditionelere wijzen van afbeelden gevolgd. En er is de grote cluster rond een van Andriesses hoofdthema's: *regenbogen*.

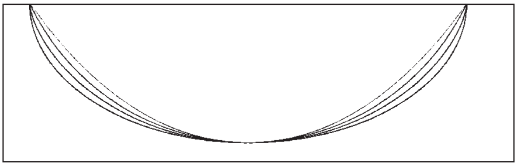
Met het kleurenspectrum zoals zich dat in regenbogen vertoont is iets merkwaardigs aan de hand. Is het continu, langzaam verglijdend van violet naar rood, of verloopt die opeenvolging in discrete stappen, met indigo, blauw, groen, geel en oranje als duidelijk gemarkeerde tussenfasen? Kijkend naar een regenboog is het moeilijk tussen die twee alternatieven te beslissen. Het verloop van de kleuren is niet helemaal gelijkmatig, maar het is ook niet zo dat je precies het punt kunt aangeven waar de ene kleur overgaat in de andere. Kun je een regenboog eigenlijk wel schilderen? In de catalogus lees ik dat Aristoteles van mening was dat dat principieel onmogelijk was, omdat de stoffelijke pigmenten nooit recht zouden kunnen doen aan de zuivere kleuren aan de hemel. In de vele landschapsschilderijen van de Hollandse meesters uit de zeventiende eeuw is dan ook nauwelijks een regenboog te vinden. En die kleuren zouden dan ook nog eens ontstaan moeten zijn uit de breking van het licht? Jan Andriesse heeft zich er jarenlang mee beziggehouden en kwam er achter dat bij het spectrum zoals dat door Newton wordt gepresenteerd de kleuren in de verkeerde verhouding worden voorgesteld. Te weinig groen! Gemengd (op een snel draaiende kleurschijf) in de verhouding volgens Newton levert dat geen wit op, maar een soort grijs. Alleen als gezorgd wordt voor de juiste groenvoorziening, zoals de Belgische fysicus Joseph Plateau dat twee eeuwen na Newton deed, krijg je een kleurenspectrum dat bij vermenging ook werkelijk wit oplevert. Het is dat spectrum van Plateau dat Andriesse volgt bij zijn regenboogstudies. En daarmee heeft zijn fascinatie voor het licht zich vermengd met een van zijn andere fascinaties: die voor de juiste proportie. Aan de meeste schilderijen is het niet te zien, maar die paar subtiele lijnen die na het leegmaken van het vlak nog overblijven, worden in bedwang gehouden door een uitgewogen proportierooster, waarbinnen de gulden snede de boventoon voert. Niet alleen de welvingen van *the river below*, maar ook de twee kromme lijnen die als enigen de tien vierkante meter van *the same and the other* bevolken, zijn pas te begrijpen vanuit het proportierooster dat intussen onder de verf begraven is.

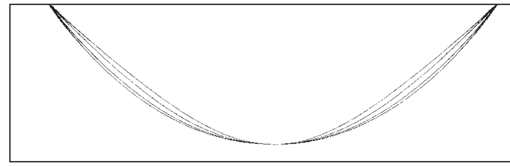
Andriesses tekeningen zijn toegankelijker dan zulke schilderijen, omdat ze meer prijsgeven van de werkwijze. De geometrische onderbouw gaat hier niet schuil onder lagen verf, maar blijft aan de oppervlakte. De kleine gaatjes van de passerpunt verraden hoe de picturale ruimte aan zijn structuur is gekomen. Soms vervaagt de grens tussen hulpconstructie en eindproduct, zoals in onderstaande tekening uit 1995 die weinig verhullend *vierkant, vijfhoek, gulden snede, Kepler, Penrose* is genoemd.



De fascinatie voor de zwaartekracht wordt in Andriesses werk vooral zichtbaar door de dunne kettingen die deel uitmaken van veel schilderijen. De recente serie jaargetijden (*winter*, *lente*, *zomer*, en *de Waal bij Tiel - herfst 98*) is daar een goede illustratie van. Op indirecte wijze verwijzen die kettingen ook weer naar het water: Andriesse woont op een boot, en de ketting is dus de navelstreng die zijn waterwereld met de vaste wal verbindt.

We vinden de kettingvorm ook terug op het tweeluik *7 curven*, een sleutelwerk in Andriesses oeuvre dat ook na de tentoonstelling nog in Dordrecht te zien zal zijn, omdat de kunstenaar het aan het museum heeft geschonken. De twee maal vier curven strekken zich uit over twee gigantische doeken, van 220 hoog bij 711 breed - en wie Andriesse een beetje heeft leren kennen, begrijpt dat die buitenissige maat verstaan moet worden als 1 : $\sqrt{5}$ + 1) of, anders gezegd, als 1 : 2Φ. Het verrassende sommetje 2 x 4 = 7 (ik zei al dat hier een ander soort wiskunde aan de orde is dan waar we in *Arthesis* aan gewend zijn) wordt verklaard doordat de onderste boog van het ene doek dezelfde is als





de bovenste boog van het andere doek. Beide staan hier naast elkaar afgebeeld zoals ze ook in Dordrecht naast elkaar hangen.

De eerste confrontatie met de *7 curven* geeft een ongemakkelijk gevoel, waarvan de oorzaak niet moeilijk te vinden is: als die kettingen hun beide ophangpunten en ook hun laagste punt met elkaar delen, waarom vallen ze dan niet *helemaal* samen? Hoe kunnen ze dan een verschillende lengte hebben? Welke natuurwetten worden hier overtreden? De plastische oplossing van het raadsel is bij nadere beschouwing van het werk eenvoudig genoeg, al dringt het niet meteen tot iedere beschouwer door ("dat komt doordat die kettingen allemaal van ander materiaal zijn", hoorde ik een bezoeker zeggen), maar arthetische verwondering blijft. Dat de ketting een andere boog beschrijft naarmate hij korter is én naarmate de ophangpunten verder van elkaar verwijderd zijn spreekt vanzelf, maar als zowel ophangpunten als laagste punt samenvallen kan dat geen verklaring zijn voor de koersafwijkingen die we hier voor ons zien. Het bijschrift maakt duidelijk dat die andere curven dan ook geen kettingbogen zijn, maar respectievelijk hyperbool, sinus en parabool (boven de kettingboog) en cirkel, cycloïde en ellips (onder de kettingboog). Maar is het dan werkelijk mogelijk zulke geraffineerde verschillen in kromming met zulke precieze namen te benoemen? Gaat een sinus een hyperbool heten wanneer hij iets van zijn rondheid inlevert? En waar ligt die grens dan? Opeens wordt het duidelijk dat Andriesse ons hier met hetzelfde probleem opzadelt als bij de regenboog: net als bij de kleuren zijn er ook in dit geval zeven gradaties die elk een eigen naam hebben, maar zijn dat nu ook echt andere boogvormen? Het artikel in de catalogus van Jan Aarts, hoogleraar wiskunde aan de TU Delft, maakt duidelijk dat deze vragen bevestigend beantwoord moeten worden: in de loop van de geschiedenis zijn al die curven stuk voor stuk ontdekt en beschreven - door Euclides, door Apollonius, door Huygens, door Bernoulli ... Allerlei praktische vragen, over de juiste baan van de planeten tot en met de optimale glijgoot voor het skateboarden, leiden tot antwoorden waarin telkens één van die curven zijn diensten bewijst.

Terug naar de proporties. Ik maakte al melding van de proportieroosters die aan de meeste werken van Andriesse ten grondslag liggen. De gulden snede bleek voor hem de meest bevredigende resultaten op te leveren, inclusief allerlei varianten die vanuit die maat te vinden zijn. Ook de Fibonacci-getallen duiken af en toe op, zoals in *chinees perspectief* en in de *studie voor water* uit 1983. In dit laatste werk vinden we zowel de aritmetische toepassing van de bekende reeks, namelijk in de ordening van de *aantallen* afgebeelde rechthoeken, alsook de geometrische toepassing van de gulden snede in de verhouding van de *oppervlak-*

ken van die rechthoeken. Die verhouden zich namelijk als $1 : \Phi^2 : \Phi^4 : \Phi^8$.

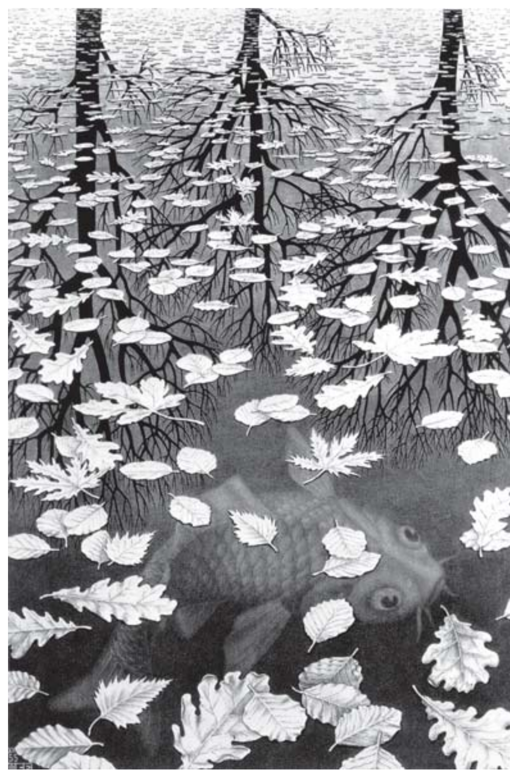
Maar het favoriete geometrische hulpmiddel van de schilder is de driehoek van Kepler, de rechthoekige driehoek waarvan de korte rechthoekszijde zich tot de hypotenusa verhoudt volgens de gulden snede ($1 : \Phi$). Het zal Andriesse dus genoegen doen dat deze astronoom, die ontdekte dat de planeten de baan van een van zijn curven volgen (de ellips), ook degene was die als eerste de relatie tussen de gulden snede en de Reeks van Fibonacci beschreef.

Albert van der Schoot

De Catalogus (f45) kan worden besteld bij het Dordrechts Museum, Museumstraat 40, 3311 XP Dordrecht, tel: 078-6482148, e-mail: museum@dordt.nl.

Escher: echt/virtueel - expositie in het Gemeentemuseum Den Haag

Als enig museum ter wereld bezit het Haags Gemeentemuseum van alle prenten van Escher een afdruk. De afgelopen decennia heeft de Escher-collectie de hele wereld rondgereisd. Nu is zij, na lange tijd, weer "in huis" te zien: van *20 mei t/m 8 oktober 2000*. Behalve prenten toont de tentoonstelling ook enige tekeningen. Schetsen en studies geven een indruk van Eschers zorgvuldige werkwijze bij het maken van zijn prenten. Zijn eigen indeling van zijn werk in 10 thematische groepen vormt de basis van de tentoonstelling. Eschers teksten keren terug in de zaalteksten en bijschriften bij de werken: Escher is hier zelf aan het woord. Binnen de tentoonstelling zijn de feitelijke en virtuele kennismaking met het werk van Escher verweven: in elke tentoonstellingszaal vindt de bezoeker naast werken van de graficus ook een monitor waarop Escher-achtige beelden te zien zijn. De bezoeker is daarbij de actieve partner, door aan te geven in welke richting het kunstwerk zich moet evolueren; het computerprogramma ontwikkelt vervolgens een nieuwe generatie beelden. In een aparte computerzaal kan men zelf experimenteren.

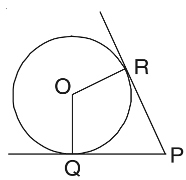


M.C. Escher: Drie werelden (litho, 1955)
Collectie Gemeentemuseum Den Haag
(© Cordon Art, Baarn)

oplossingen sangaku-opdrachten

In de laatste Arthesis van 1999 stonden 4 sangaku-opdrachten, die tevens de grondslag vormen voor het “sangaku-kwartet” dat op de Ars et Mathesisdag 1999 werd gepresenteerd. Hieronder staan de oplossingen. Kwartet (4 kaarten plus oplossingen) en sangaku-poster kunnen nog worden besteld, in nederlandstalige of in engelse versie (informatie over bestellen: zie pagina 19).

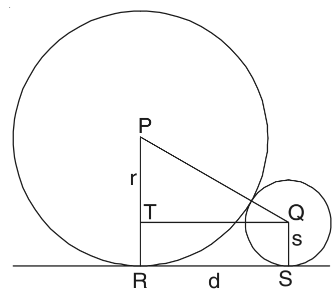
Sangaku-opdrachten - zoals deze ook - hebben vaak met cirkels en raaklijnen te maken. Een raaklijn is een lijn die met de cirkel precies één punt gemeenschappelijk heeft, namelijk het raakpunt. Om met sangaku’s aan de slag te kunnen gaan is het nuttig de volgende eigenschappen van raaklijnen te kennen. Ze zijn eigenlijk stellingen: probeer eerst deze te bewijzen.



(I) Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal die het raakpunt met het middelpunt van de cirkel verbindt: *OQ* staat loodrecht op *QP* en *OR* loodrecht op *RP*.

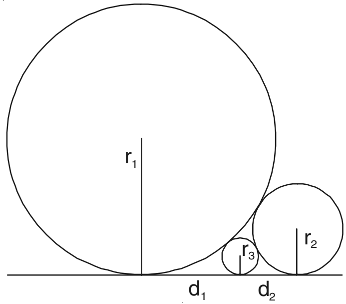
(II) Van een punt *P* buiten een cirkel lopen twee raaklijnen erheen. De afstand van *P* tot de raakpunten is uit te drukken met behulp van de stelling van Pythagoras: $QP^2 = OP^2 - r^2$ en $RP^2 = OP^2 - r^2$.
In het bijzonder geldt dat $QP = RP$.

(III) Als twee cirkels elkaar raken, dan ligt het raakpunt op de lijn die door het middelpunt van de cirkels loopt.



Kijk naar de figuur. Laat de straal van de cirkels r en s zijn, zo dat $r > s$. Volgens (I) is *TQSR* een rechthoek, zodat $PT = r - s$. Volgens (III) geldt: $PQ = s + r$.

Nu gebruiken we de stelling van Pythagoras om d als de lengte van een zijde in de rechthoekige driehoek *PQT* te bepalen, namelijk: $d^2 = PQ^2 - PT^2$.
Als we aan de rechterkant $PT = r - s$ en $PQ = s + r$ invullen, dan krijgen we dat: $d = 2 \times \sqrt{sr}$.

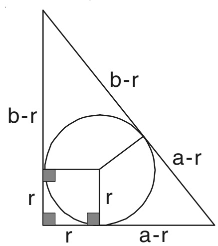


De te bewijzen formule is: $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$.

Hieruit volgt dat $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}}$ groter is dan $\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$ en $\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$.

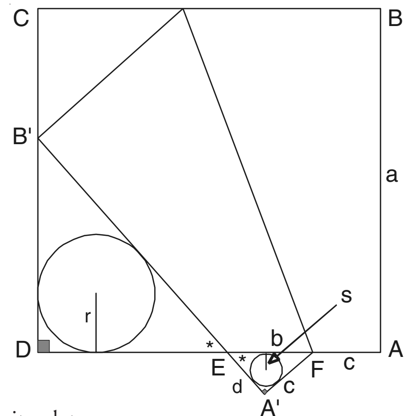
Dus r_3 moet de straal zijn van de kleinste cirkel. Kijk nu naar de figuur, waarin we aangenomen hebben dat $r_1 > r_2 > r_3$. Van de oplossing hierboven weten we al dat:
$d_1 = 2 \times \sqrt{r_1 r_3}$, $d_2 = 2 \times \sqrt{r_2 r_3}$ en
$d_1 + d_2 = 2 \times \sqrt{r_1 r_2}$.
Dus $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_3}$.
Door beide kanten van deze vergelijking te delen door $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ krijgen we wat te bewijzen was.

Deze sangaku kan men goed demonstreren door een vierkant stuk papier zo te vouwen, dat een hoekpunt B ergens op de zijde CD terecht komt. We noemen dit punt B'. De opgave is om te bewijzen dat, waar men B' ook kiest, altijd geldt dat $r=d$. r is de straal van de in een rechthoekige driehoek ingeschreven cirkel. I.h.a. geldt dat de diameter van de in een rechthoekige driehoek ingeschreven cirkel gelijk is aan de som van de twee rechte zijden minus de schuine zijde. Dit is makkelijk te bewijzen als men opmerkt dat de raakpunten op de rechthoekszijden, het rechthoekige punt en het midden van de cirkel een vierkant vormen: zie de figuur.



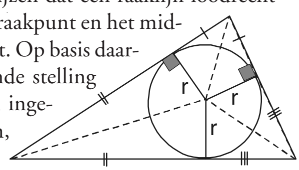
Bovendien verdelen de raakpunten de zijden in zes stukken, waarvan de stukken met hetzelfde hoekpunt paarsgewijs even lang zijn. Dus: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

In de figuur rechts zijn de twee driehoeken $FA'E$ en $B'DE$ gelijkvormige rechthoekige driehoeken. Daarin is de verhouding van de straal van de ingeschreven cirkel tot een zijde hetzelfde, dus $\dfrac{r}{DE} = \dfrac{s}{A'E}$ en $\dfrac{r}{B'E} = \dfrac{s}{EF}$.

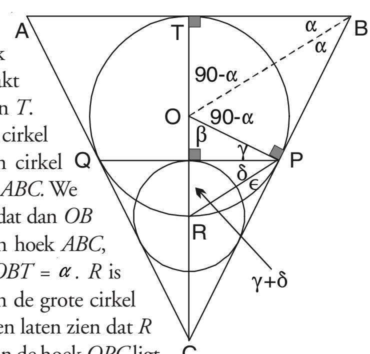


Hieruit volgt:
$r(EF - A'E) = s(B'E - DE)$. Maar $EF - A'E = b - d$ en $B'E - DE = (a - d) - (a - (b + c)) = b + c - d$.
Verder zagen we al dat $s = \frac{1}{2}(d + c - b)$, zodat:
$r(b - d) = \frac{1}{2}(c + d - b)(c + b - d) = \frac{1}{2}(c^2 - d^2 - b^2 + 2db)$.
In de rechterkant staat $c^2 - d^2 - b^2$. Dit is gelijk aan $-2d^2$ volgens de stelling van Pythagoras.
Dus we hebben: $r(b - d) = \frac{1}{2}(2db - 2d^2) = d(b - d)$.
Hieruit volgt dat $r = d$.

Het is makkelijk te bewijzen dat een raaklijn loodrecht staat op de straal die het raakpunt en het midden van de cirkel verbindt. Op basis daarvan kan men de beroemde stelling over de in een driehoek ingeschreven cirkel bewijzen, namelijk:



(I) De deellijnen van de hoeken van een driehoek lopen door één punt en dat punt ligt even ver van de zijden. Men kan dus rondom dit punt een cirkel trekken die elke zijde raakt: de ingeschreven cirkel van de driehoek.
(II) Het is ook waar dat er precies één punt bestaat dat van elke zijde even ver verwijderd is. Met andere woorden: er is precies één ingeschreven cirkel voor elke driehoek. De figuur boven geeft suggestie voor het bewijs.
Deze sangaku illustreert een bijzondere stelling. Men neemt een cirkel en de driehoek gevormd door twee niet parallelle raaklijnen van de cirkel en de koorde tussen de twee raakpunten. Het midden van de in deze driehoek ingeschreven cirkel ligt op de oorspronkelijke cirkel.
Om deze stelling te bewijzen kijken we naar de figuur hiernaast.



CT is de deellijn van hoek QCP en AB raakt de grote cirkel in T. Dan is de grote cirkel de ingeschreven cirkel van de driehoek ABC. We hebben gezien dat dan OB de deellijn is van hoek ABC, dus is $OBP = OBT = \alpha$. R is het snijpunt van de grote cirkel en TC. We zullen laten zien dat R op de deellijn van de hoek QPC ligt.
Omdat R ook op de deellijn van hoek QCP ligt volgt uit de stelling over het midden van een ingeschreven cirkel dat R het midden is van de in QPC ingeschreven cirkel. Ofwel, het midden van de kleine cirkel is precies R. We moeten dus alleen bewijzen dat in de figuur * = ,. Maar $ = 180 - 2(90 - α) = 2α en (= 90 - $ = 90 - 2α. En OPR is een gelijkbenige driehoek, want $OR = OP$. Dus (+ * = ½(180 - $) = 90 - α. Maar dan is * = ((+ *) - (= 90 - α - (90 - 2α) = α, en , = 90 -((+ *) = 90 - (90 - α) = α. Dus inderdaad: * = ,.

prentkunst - printkunst

Ter gelegenheid van een expositie in Galerie Mégan in Assen van digitale grafiek van Cees Swart en Ineke Lambers verscheen een heel mooi uitgevoerd boekje: *digitale grafiek – een hele kunst.* Omdat onbekend ook onbemind maakt, is het een goede gedachte om uit de doeken te doen (uit de printer te halen?) waarom digitale grafiek toch ook een hele kunst is. Genietend van de fraaie illustraties in dit kleinood is er geen twijfel mogelijk over de kunst van de digitale kunde. Uitgaande van de beschrijvingen van hoogdruk, diepdruk, vlakdruk en zeefdruk wordt de computerdruk geïntroduceerd. Vervolgens wordt aandacht besteed aan de werkwijze bij digitale grafiek en de principes die er aan ten grondslag liggen. Heel boeiend zijn de stukjes over het ontstaan van een prent: Cees Swart en Ineke Lambers vertellen beiden over hun werkwijze en inspiratiebronnen. Het geheel wordt aangevuld met bijdragen van Johan Faber (Academie Minerva) over de computer in het kunstonderwijs en Niek Satijn (Vereniging voor Originele Grafiek) over digitale grafiek als hedendaagse grafische kunstvorm.

Het boekje laat met enkele sprekende beelden ook zien hoe prenten van elk van de kunstenaars te combineren zijn. Dit ondanks het feit dat elk een geheel eigen stijl heeft, te zien aan de twee- en drieluiken van Cees Swart en de vierkante prenten van Ineke Lambers waarmee het boekje rijkelijk is geïllustreerd; jammer dat formaat en oplage er niet bij zijn vermeld.

Voor zover mij bekend is dit boekje een unieke bijdrage ten gunste van de printkunst.

H.P. van Tongeren

meer over de vierde dimensie

Surfing through Hyperspace (Understanding Higher Universes in Six Easy Lessons) - Clifford A. Pickover; Oxford University Press 1999, New York, Oxford (ISBN 0-19-513006-5). Prijs $ 25.

Velen van ons hebben genoten van de lezing van Aad Goddijn tijdens de laatste Ars et Mathesisdag. Hij maakte ons meer vertrouwd met de eigenaardigheden van de vierde dimensie, met de vierde dimensie in de kunst en trachtte zelfs ons de vierde dimensie te laten zien door middel van projecties. Dit en veel meer is nu juist het onderwerp van dit nieuwe boek van Dr. C.A. Pickover, medewerker van het IBM Thomas J. Watson Research Center en schrijver van diverse boeken. Zijn laatste boek “Surfing Through Hyperspace” sluit goed aan op de lezing van Aad Goddijn. Alle mogelijke eigenschappen van de vierde dimensie worden besproken, deels in romanvorm, zodat het zeker geen zwaar of moeilijk verstaanbaar boek is geworden. Talrijke illustraties (waaronder drie prenten van ondergetekende) verduidelijken de tekst. Het boek eindigt met diverse aanvullingen over puzzels, science fiction, Fles van Klein Banchoff, quarterbions, doolhoven, steeds in relatie tot de vierde dimensie. Voor iedereen die na de lezing van Aad Goddijn meer zou willen weten over hogere dimensies, is dit een aanrader.

Peter Raedschelders

Er zijn nog enkele exemplaren van het boekje over digitale grafiek verkrijgbaar (fl15 plus verzending). Aanvragen toezending (zolang de oplage strekt): email naar ilambers@wxs.nl, of telefonisch (0594-659279).

ARS ET MATHESIS

De Stichting ARS ET MATHESIS (opgericht in 1983) heeft tot doel de belangstelling te bevorderen voor kunst die zijn inspiratie vindt in de wiskunde. Dit gebeurt onder meer door tentoonstellingen, publicatie van boeken en artikelen, het uitgeven van het blad "ARTHESIS" en het organiseren van een jaarlijkse ARS ET MATHESIS dag (diverse voordrachten gecombineerd met een dag-expositie waar werk van velerlei exposanten is te bekijken).

donateurs Donateurs (minimum donatie fl 30,- per jaar) ontvangen Arthesis en hebben gratis of tegen gereduceerd tarief toegang tot de jaarlijkse Ars et Mathesis-dag. Bijdragen kunnen worden overgemaakt op bankrekening nummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn; s.v.p. met duidelijke vermelding van eigen naam en adres, en van "Ars et Mathesis".

inlichtingen: H.P. van Tongeren (voorzitter)
Beverodelaan 205, 6952 JH Dieren
tel. 0313-413307; email: henkiep@wxs.nl.

secretariaat: A. Goddijn
Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
email: A.Goddijn@fi.uu.nl

aanmelding als donateur, adreswijzigingen, bestellingen:
Ineke Lambers
Ontginningsweg 1, 9865 XA Opende
tel. 0594-659279; email: ilambers@wxs.nl.

Internet: *http://www.euronet.nl/~nvvw/ArsetMathesis.html.*

Ars et Mathesis producten

verkrijgbaar: Sangaku-kwartet [sk], Sangaku-poster A3 of A4 [sp], Sangaku-leliekaart [slk], Sangaku-lelieposter A3 of A4 [slp]: nederlands of engels [n of e]; A&M poster A3 of A4 [amp], A&M knoop-kaart [amkk], A&M letterkaarten [amlk], losse nummers Arthesis vanaf jaargang 14 [art/jaargang/nr].

prijzen: kaarten (per set van 4) fl 10 , poster A4 formaat fl 5, poster A3 formaat fl 12,50, nummers Arthesis fl 7,50; A3 posters plus fl 5 voor toezending, overig plus fl 2,50 voor toezending.

bestelwijze: door overmaken van het totaalbedrag op gironr 1315269 t.n.v. J.J. Lambers-Hacquebard, onder vermelding van: "AM-bestelling", gewenste aantallen en soorten producten en het adres waar de bestelling naar toe moet worden gezonden. Gebruik s.v.p. de hierboven tussen [ ] vermelde codes.