een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis

ARTHESIS

jaargang 13, nr 1

februari/maart 1999

EEN MOOIE DAG - EEN BEELDVERSLAG

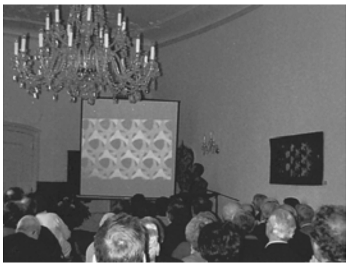
De sfeervolle Hasselaerzaal van het fraaie Kasteel Groeneveld in Baarn was op 7 november tot in de uiterste hoeken gevuld met deelnemers aan de 10e Ars et Mathesisdag.
De drievoudige aanleiding om deze dag een speciaal cachet toe te kennen - 100 jaar M.C. Escher, 15 jaar Ars et Mathesis, 10e keer de jaarlijkse dag - kon op deze locatie in meerdere opzichten worden gehonoreerd. Zo is er enthousiast gebruik gemaakt van de gelegenheid de tentoonstelling *'Escher: Een leven in beeld'* en de flankerende exposities van quilts en ex-libris te bezichtigen. Ook de eigen dag-

expositie van Ars et Mathesis, met als toevoeging de winnende inzendingen van de Escherprijsvraag van Pythagoras en Ars et Mathesis, kon zich in grote belangstelling verheugen. In het lezingen-programma werd in vier voordrachten (die van Hans de Rijk kwam helaas door ziekte te vervallen) het thema Escher verrassend en boeiend uitgelicht. En dan was er ook nog de prijsuitreiking van de wedstrijd!

Op de volgende bladzijden een aantal foto's bij wijze van beeldverslag van een mooie dag, alsmede de volledige uitslag van de wedstrijd.

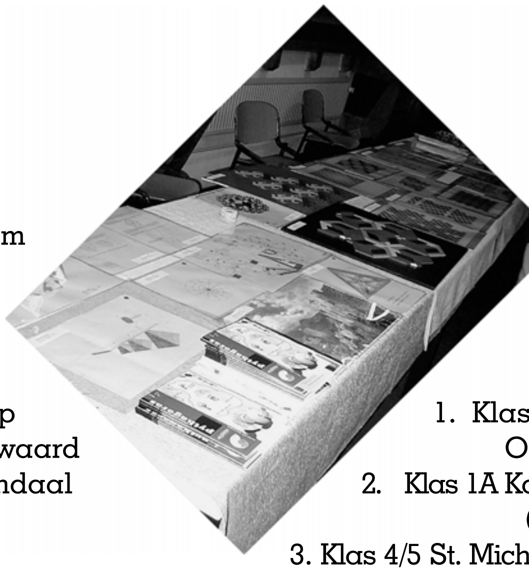
Stichting Ars et Mathesis
Inlichtingen, aanmelding als donateur, kopij voor Arthesis: Beverodelaan 205, 6952 JH Dieren, tel. 0313-413307. Financiële bijdragen (minimumdonatie fl 30,- per jr) over te maken op bankrekeningnummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn (gironummer van de ABN/AMRO-bank te Baarn: 32750). S.v.p. duidelijke vermelding van uw eigen naam en adres, en "Ars et Mathesis".

DE LEZINGEN



DE WEDSTRIJD

Rond de foto van de tafel met winnend werk staat de uitslag van de Escher-prijsvraag die Pythagoras en Ars et Mathesis in het Escherjaar 1998 tezamen hebben georganiseerd.



Onderbouw (t/m 14 jaar)

1. Daan Juttman, Haarlem
2. Ciry Boon, Maassluis
3. Joris Brakke, Amsterdam

Bovenbouw (t/m 17 jaar)

1. Toni Jonkers, Zoetermeer
2. Geoffrey de Smet, Gent
3. Daan de Jong, Utrecht

Open groep

1. Simon Biesheuvel, Weesp
2. Ton Schotten, Heerhugowaard
3. C. van der Stelt, Bloemendaal

Klassenprijs

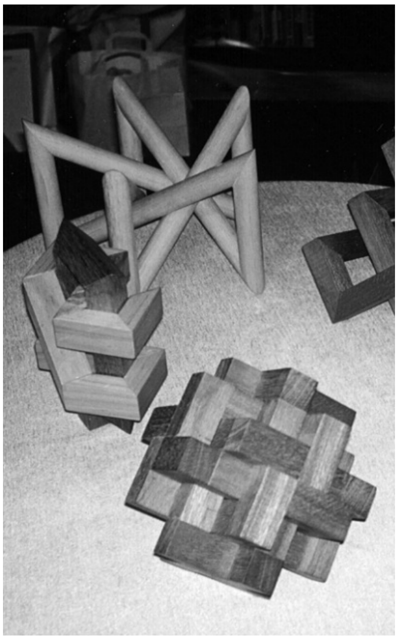
1. Klas 1 bovenbouw Onbevlekte Ontvangenis, Tongeren, België
2. Klas 1A Katholieke Scholengemeenschap (K.S.E.) Etten-Leur, Etten Leur
3. Klas 4/5 St. Michaelcollege (S.M.C.), Zaandam

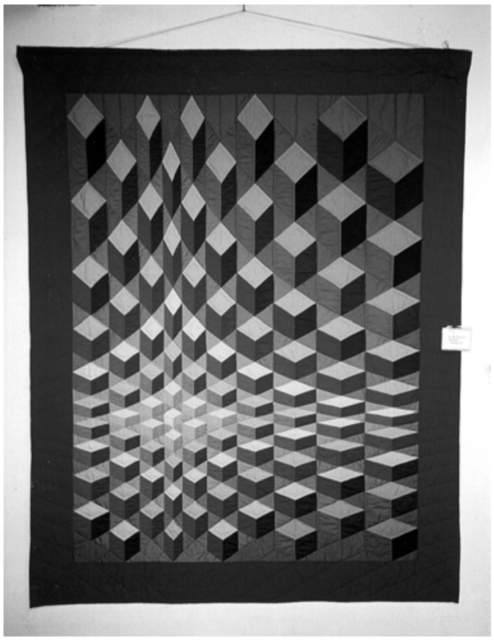
De inzendingen van de prijswinnaars zijn te zien op de website van Pythagoras: http://www.wins.uva.nl/misc/pythagoras. Ze staan ook kleurrijk afgebeeld in het februarinummer van Pythagoras; dit is (voor fl. 8,- , excl. portokosten) te bestellen bij Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, tel. nr 0522-855175.

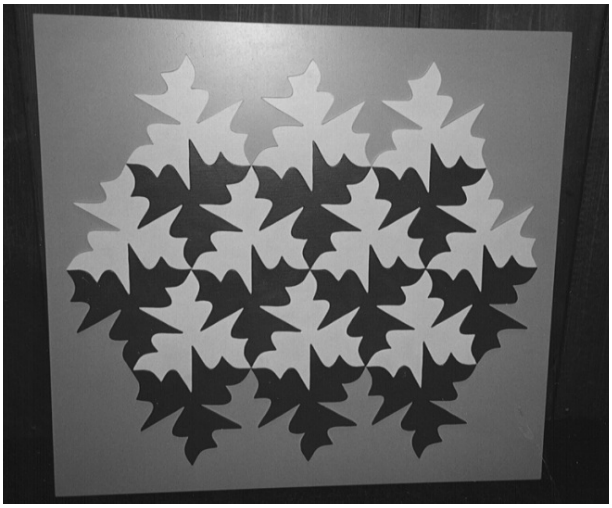
Ars et Mathesis jubileumkaart

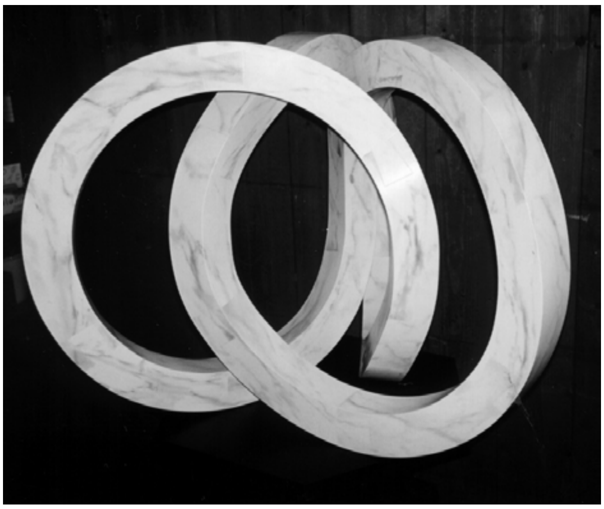
De jubileumkaart (zie de vorige Arthesis) is te bestellen, per set van 4, door overmaking van fl. 12,50 (incl. verzendkosten) *onder vermelding van "AM kaart" plus eigen naam/adres en het gewenste aantal sets* op giro1315269 t.n.v. J.J. Lambers-Hacquebard, De opbrengst komt ten goede aan de Stichting.

DE EXPOSITIE









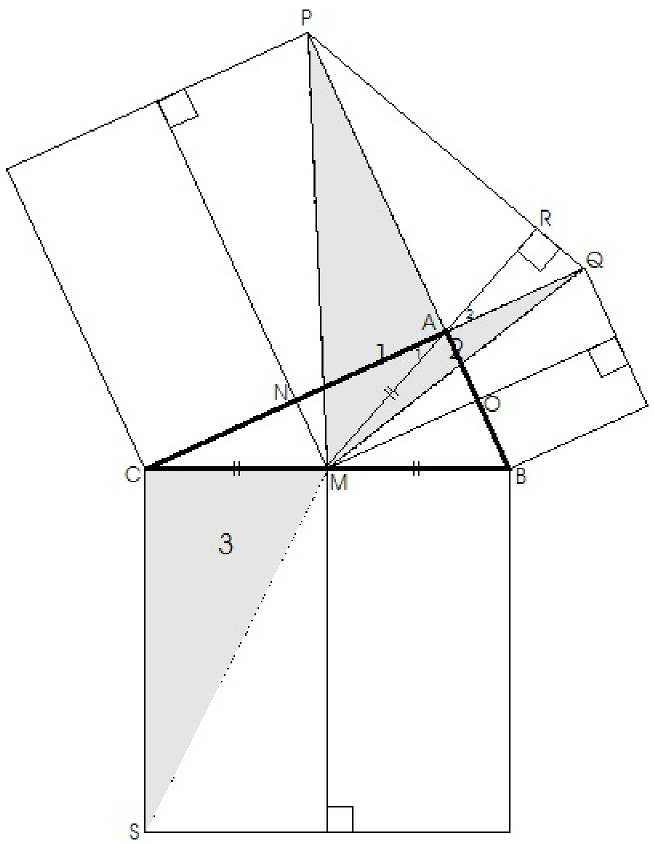
nieuwe bestuursleden
Tot het bestuur van de stichting Ars et Mathesis zijn toegetreden Zsofia Ruttkay en Rinus Roelofs.

EEN EIGENWIJS BEWIJS VAN ANN

Onze stichting houdt zich bezig met de relatie tussen kunst en wiskunde; anders geformuleerd: ze verkent het raakvlak tussen wiskunde en kunst. Maar valt er in de wiskunde zelf niet iets van schoonheid te bespeuren? Wiskundigen spreken van een *fraai* bewijs, van *elegante* oplossingen....; maar ook van rommelige bewijzen, saaie bewijzen. In deze tegenstelling vinden we iets terug van de tegenstelling: mooi - lelijk.

Het afgelopen jaar heb ik (puur uit nieuwsgierigheid) ongeveer 300 bewijzen voor de stelling van Pythagoras doorgewerkt. Daarbij kwam opvallend het verschil tussen elegante, fraaie bewijzen en saaie of rommelige bewijzen naar voren.

Ik wil u graag een voorbeeld geven van een heel fraaie oplossing van een meisje van 16 jaar. Het is beslist niet zo'n eenvoudig bewijs. Maar schrik niet: ik heb het hier heel breedvoerig weergegeven (het had ook in enige regels gekund, maar dan zou het minder gemakkelijk zijn om het te volgen).



Het was oktober 1938. Een meisje van zestien, Ann Condit, kwam bij haar wiskundeleraar van een Amerikaanse middelbare school met de mededeling: Ik heb een nieuw bewijs gevonden voor de stelling van Pythagoras. Ze liet hem een blaadje zien waarop de figuur en het bewijs stonden. Het bleek niet zomaar een interessante variant te zijn op de vele reeds bekende bewijzen voor deze stelling, maar een heel bijzonder en heel knap bedacht bewijs, waarbij alleen maar hulplijnen gebruikt worden die uitgaan van het midden M van de schuine zijde van de rechthoekige driehoek.

Ann had op de zijden van de rechthoekige driehoek ABC vierkanten getekend en vanuit M loodlijnen getrokken op de tegenoverliggende zijden van de vierkanten. Deze verdelen elk vierkant in twee gelijke rechthoeken. Verder vanuit M de lijnen MP, MQ en MS. En tenslotte de lijn MA die PQ in R snijdt.

We zullen nu haar bewijs vervolgen.
Eerst wat voorbereidend werk:

1. ABC $\cong$ AQP (dat is zonder meer duidelijk).
2. $\angle R=90°$. Want
$\angle A_1=\angle A_2=\angle C$ (gelijkbenige driehoek AMC).
$\angle B\ =\angle Q$ (zie 1). Omdat $\angle C+\angle B=90°$ is ook $\angle A+\angle Q=90°$, dus $\angle R=90°$.

Nu begint het bewijs, dat erop neerkomt dat:

I De oppervlakte van $\triangle 1$ gelijk is aan ¼ oppervlakte linker vierkant, oppervlakte $\triangle 2$ gelijk aan de oppervlakte van het rechter vierkant en de oppervlakte van $\triangle 3$ gelijk aan ¼ opppervlakte van het vierkant op de schuine zijde.

II De oppervlakte van $\triangle 1$ + de oppervlakte van $\triangle 2$ is gelijk aan de oppervlakte van $\triangle 3$.

We beginnen met het bewijs van I:
Het is zonder meer duidelijk dat de oppervlakte van $\triangle 3=$ ¼ vierkant op de schuine zijde. De oppervlakte van $\triangle 1=$½ MOxAP, maar omdat MO=NA is deze oppervlakte ook gelijk aan ½ NAxAP en dat is gelijk aan de oppervlakte van $\triangle$NAP. Daarvan is weer zonder meer duidelijk dat die gelijk is aan ¼ van de oppervlakte van het linker vierkant.

Op dezelfde wijze blijkt dat de oppervlakte van $\triangle 2$ gelijk is aan ¼ van de oppervlakte van het rechter vierkant.
Nu het bewijs van II ,dat de vernuftige kern vormt van de vondst van Ann Condit.:
Als we AM als de basis van $\triangle 1$ beschouwen, dan is PR de hoogte ervan. De oppervlakte van $\triangle 1$ is dan ½ PQxAM. AM is ook de basis van $\triangle 2$ waarbij dan de hoogte QR hoort, zodat de oppervlakte gelijk is aan ½ QRxAM.
We tellen nu beide oppervlakten op:

$$\begin{aligned} \text{Opp. } \triangle 1 &= \tfrac{1}{2}\, PR \times AM \\ \text{Opp. } \triangle 2 &= \tfrac{1}{2}\, QR \times AM \\ \hline \text{Opp. } \triangle 1 + \text{Opp. } \triangle 2 &= \tfrac{1}{2}\, AM\, (PR + QR) \\ &= \tfrac{1}{2}\, AM \times PQ \\ &= \tfrac{1}{2}\, AM \times BC, \text{ en omdat} \end{aligned}$$

AM=CM is dat gelijk aan ½ CM x CS en dat is weer gelijk aan de oppervlakte van $\triangle 3$.

Daarmee is het bewijs geleverd dat ¼ opp. $\triangle 1$+ ¼ opp. $\triangle 2$ = ¼ opp. $\triangle 3$. Als we beide kanten met 4 vermenigvuldigen staat er dat de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde gelijk is aan de som van de vierkanten op de rechthoekszijden.

Natuurlijk zijn er veel simpeler bewijzen van de stelling van Pythagoras, maar het gaat hier om het spel, het vernuft...... en is dat niet één van de belangrijkste redenen waarom mensen zich tot de wiskunde aangetrokken voelen?
Orn te genieten van dat spel is het niet nodig om een uitgebreide kennis te hebben van allerlei delen van de wiskunde: dat laat het bewijs van Ann Condit zien.

J.A.F. de Rijk

.... en Pythagoras in beeld

Onderstaande afbeeldingen sluiten mooi aan bij het vernuftig bewijs van Pythagoras' befaamde stelling: met dit beeld betuigt het eiland Samos nu eer aan zijn beroemde 'zoon' Pythagoras.

HET LICHAAM OP DE TOREN

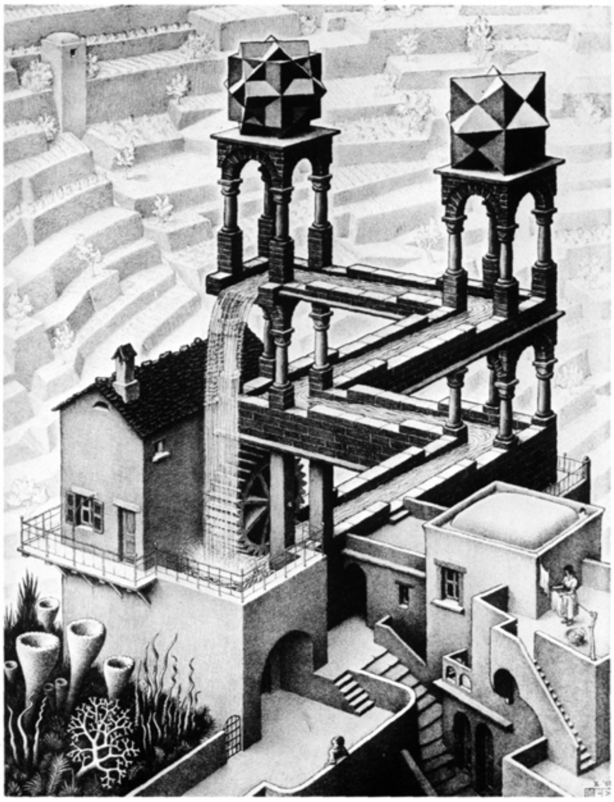
Eén van de bekendste werken van de graficus Maurits Escher is zijn in figuur 1 afgebeelde litho "Waterval" uit 1961. Deze vertoont een fantastisch bouwsel waarbinnen een de zwaartekracht tartende waterstroom circuleert. De voorstelling is gebaseerd op een zogeheten 'onmogelijke figuur' en zit vol wonderlijke details. Zo groeien er op een daktuintje monsterachtig grote mossen, hangt een vrouw op een balkon huiselijk de was op en zijn er twee torens elk bekroond met een eigenaardige ruimtelijke figuur.

Escher zelf zegt daarover: *"De veelvlakken bovenop de torens hebben geen speciale betekenis. Ik heb ze daar alleen aangebracht, omdat ik zo op ze gesteld ben: links drie elkaar doordringende kubussen, rechts drie octaëders."* (uit J.W. Vermeulen: *Maurits C. Escher: een eigenzinnig talent.* Kampen 1995).

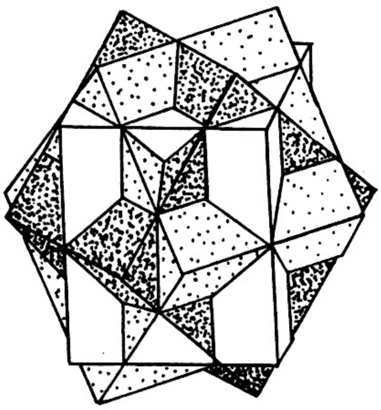
Het zijn deze ruimtelijke figuren die we hier nader zullen beschouwen.

Op de linker toren staat een lichaam als in figuur 2, dat samengesteld blijkt uit drie gelijke kubussen. We kunnen ons deze kubusdrieling op de volgende manier ontstaan denken. We brengen door de middens van twee evenwijdige vlakken van een kubus een lijn aan zoals in figuur 3. Laten we de kubus een volledige omwenteling maken rond deze lijn dan is de ruimte die de kubus na elke draaiing over 90° inneemt dezelfde. Zo'n lijn heet een viertallige symmetrie-as.

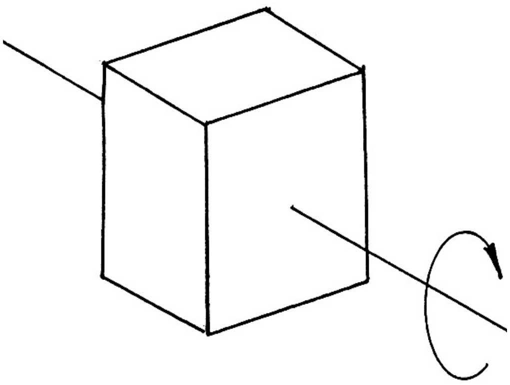
Een kubus heeft drie stel evenwijdige vlakken en bezit dus ook drie van deze symmetrieassen, zoals figuur 4 laat zien.



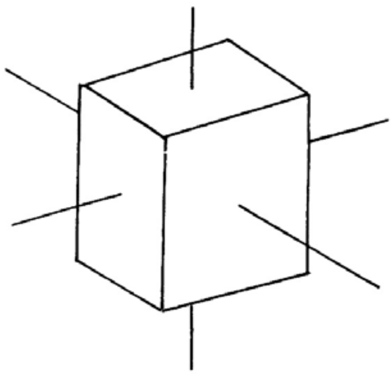
figuur 1 *M.C. Escher's 'Waterval', litho 1961*



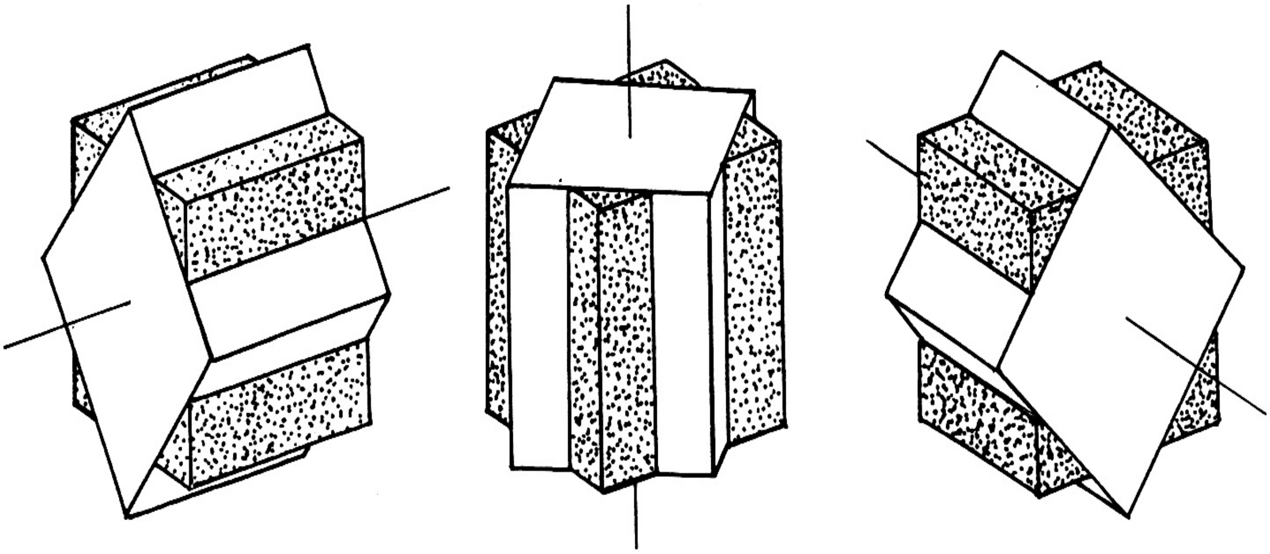
figuur 2
kubusdrieling



figuur 3
kubus met viertallige symmetrieas



figuur 4
kubus met drie viertallige symmetrieassen

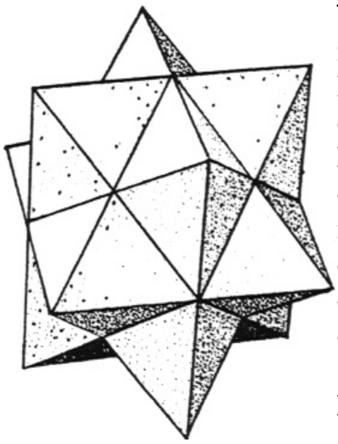


figuur 5
verdraaiing van een kubus over 45 ° rond elk van zijn drie viertallige symmetrieassen

Verdraaien we een kubus om elk van zijn drietallige symmetrieassen over een hoek van 45° (zie figuur 5) en laten we de zo verkregen kubussen elkaar doordringen om een gemeenschappelijk middelpunt, dan ontstaat de kubusdrieling van figuur 2.

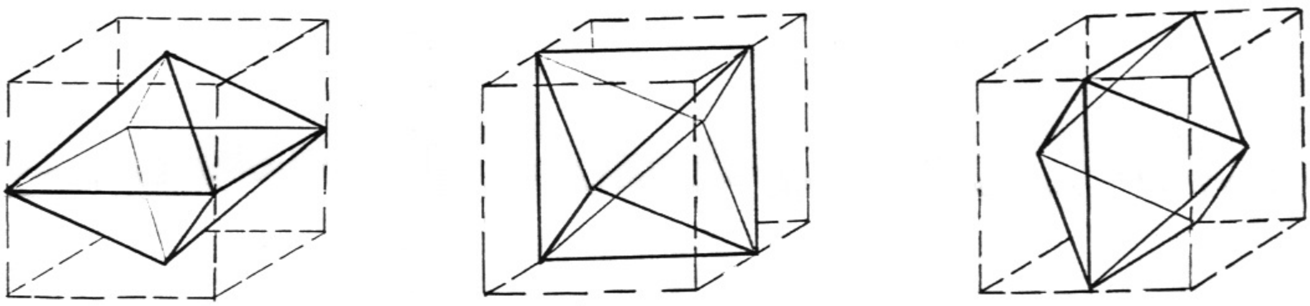
Combineren we deze drie achtvlakken elkaar doordringend rond een gemeenschappelijk middelpunt dan verkrijgen we het lichaam van figuur 6.
Voor kenners zij vermeld dat dit lichaam de eerste stellatie is van het ruitentwaalfvlak.

Figuur 6 laat het lichaam zien dat zich op de rechter toren van de 'Waterval' bevindt. Dit lichaam kunnen we ons op de volgende manier ontstaan denken:
In een kubus kunnen we een achtvlak plaatsen waarvan de hoekpunten respectievelijk liggen op de middens van het boven- en ondervlak van de kubus en de middens van de opstaande ribben, zie figuur 7a. Zo'n achtvlak past nog op twee andere manieren in een kubus, zie figuur 7b en c.



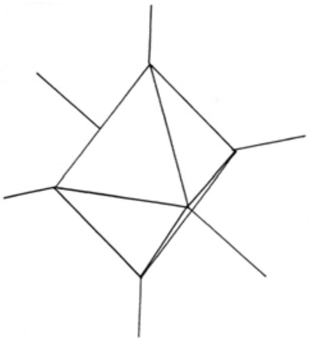
figuur 6

We kunnen elk achtvlak een octaëder noemen, maar het is gebruikelijk de benaming octaëder te reserveren voor een regelmatig achtvlak.
De achtvlakken van figuur 7 zijn echter niet regelmatig, want hun ribben zijn niet alle gelijk; geven we de ribben van het gemeenschappelijk grondvlak de waarde 1, dan blijken de acht opstaande ribben gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Het is daarom correcter om het lichaam op de rechter toren een samenstel te noemen van drie elkaar doordringende dubbelpiramiden.

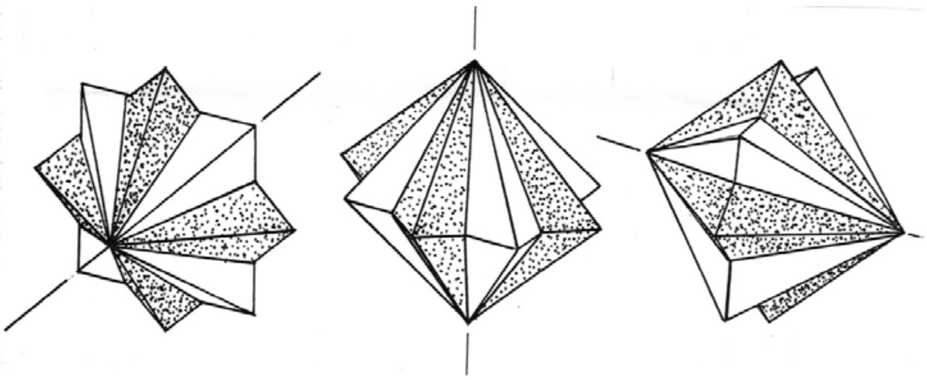


a b c

figuur 7
een achtvlak op drie wijzen in een kubus



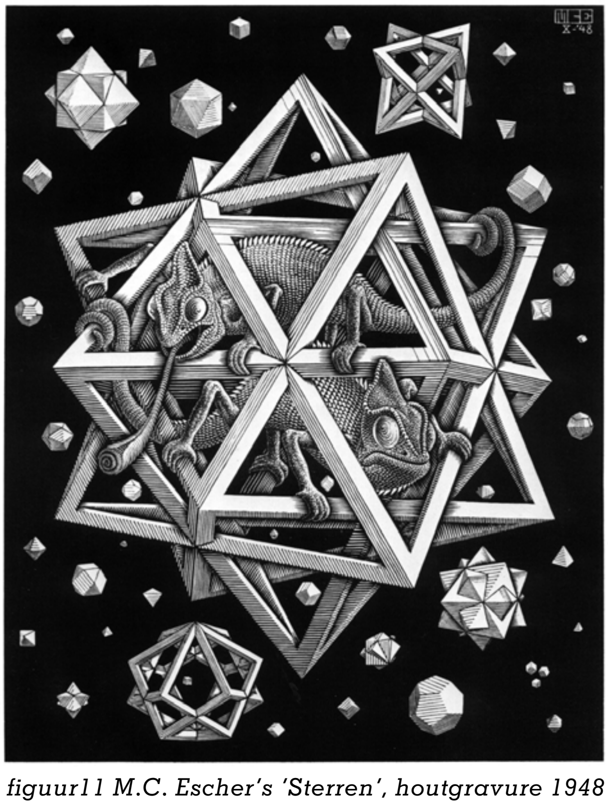
figuur 8
octaëder met drie viertallige symmetrieassen



figuur 9
verdraaiing van een octaëder over 45° rond elk van zijn drietallige symmetrieassen

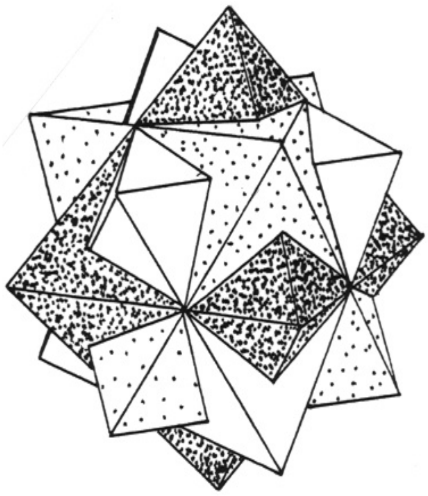
We kunnen ons tenslotte afvragen hoe een samenstel van drie elkaar doordringende regelmatige achtvlakken er uit ziet.

We merken op dat een octaëder evenals een kubus drie viertallige symmetrieassen heeft, zie figuur 8.



figuur11 M.C. Escher's 'Sterren', houtgravure 1948

Verdraaien we een octaëder om elk van die assen over 45° - zie figuur 9 - en een gezamenlijk middelpunt, dan ontstaat de octaëderdrieling van figuur 10.



figuur 10
octaëderdrieling

Waarom heeft Escher deze octaëderdrieling niet op de rechter toren geplaatst? Zag hij het lichaam dat hij afbeeldde voor een regelmatige achtvlakdrieling aan? Dat is weinig waarschijnlijk, want dertien jaar eerder maakte hij een houtgravure waarop deze te zien is, zie figuur 11. Waarschijnlijk wilde hij met zijn keuze van de veelvlakken op de toren een element van zinsbegoocheling of mystificatie inbrengen, waarmee de "Waterval" zo vol zit.

B.J.M. Roovers

---

cursus De Gulden Snede

De Internationale School voor Wijsbegeerte organiseert op zaterdag 17 en zondag 18 April een cursus over de gulden snede, waarin "de goddelijke proportie" vanuit verschillende invalshoeken zal worden belicht. Docent is Albert van der Schoot. Nadere inlichtingen: ISVW, tel. 033-4227200.