een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis

ARTHESIS

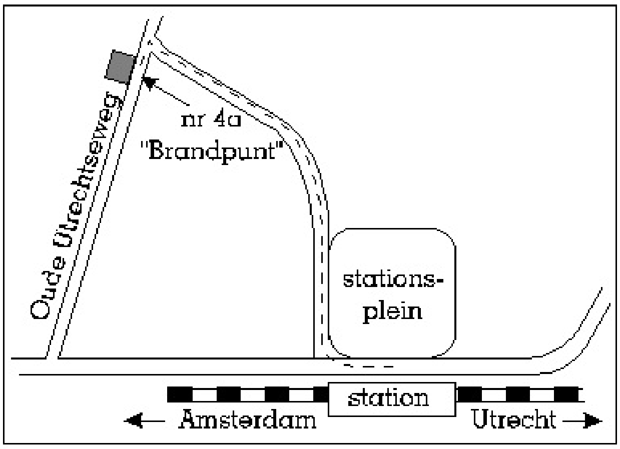
jaargang 11, nr 4

oktober 1997

ARS ET MATHESISDAG 1997

UITNODIGING voor de Ars et Mathesisdag 1997:

Plaats en tijd:
De jaarlijkse Ars et Mathesis-dag wordt dit jaar gehouden op
zaterdag 8 NOVEMBER 1997
in gebouw "BRANDPUNT",
Oude Utrechtseweg 4a,
te Baarn;
op loopafstand van het station (ca 5 min.),
zie nevenstaand kaartje.
Vanaf 9.15 uur kunnen exposanten en demonstratoren terecht voor het uitstallen van materiaal.



Programma:

10.00-10.30	Ontvangst van de deelnemers / koffie.
10.30-12.30	Voordrachten en demonstraties.
12.30-14.00	Pauze. Koffie, soep en broodjes zijn in de zaal verkrijgbaar. De pauze is ruim genomen om U de gelegenheid te geven tot het leggen van contacten en om alles te bekijken.
14.00-16.00	Voordrachten en demonstraties.
17.00	moet de zaal leeg zijn.

Toegangsprijs:
De toegangsprijs bedraagt voor niet-donateurs **7,50.** Zij ontvangen alleen de eerste twee pagina's van dit nummer van Arthesis.
Donateurs hebben gratis toegang op vertoon van dit Arthesis-nummer.

Lezingen en demonstraties:
Er staat een rijk geschakeerd en al haast overladen programma aan inleidingen op stapel (zie de volgende pagina). Daarnaast hopen we werk van een keur aan exposanten te kunnen zien.

De diverse programma-onderdelen op 8 november:

Het ochtendprogramma is geheel gewijd aan het thema perspectief; 's middags komen uiteenlopende onderwerpen aan bod. U kunt in elk geval het volgende verwachten:

1. ***Hans de Rijk***: *Wie was de uitvinder van de perspectiefleer*.

   Bij nader onderzoek blijkt niemand die eer voor zich op te eisen. Toch hebben we veel documenten uit de tijd van de uitvinding (rond 1425).

2. ***L. Couprie*** *(Rijksuniversiteit Leiden)*: *Waar is de horizon gebleven*.

   In de 19e eeuw zien we veel schilderijen ontstaan waarop alle sporen van een horizon zijn verdwenen. Is hier nog verband met een systematische ruimte-afbeelding?

3. ***Jos de Mey***: *De bomen*.

   In de periode 1975-1978 tekende en schilderde Jos de Mey zowat 150 varianten op het thema van de boom van Pythagoras. In 1985 nam hij de draad weer op en sindsdien heeft hij er, tot op heden, nog een 80-tal varianten bijgetekend.

   Deze voordracht gaat vergezeld van een diavertoning.

4. ***Frits Göbel***: *Borromeaanse ringen en Davidssterren*.
5. ***A.P. Goddijn***: *Kort bericht over anamorfosen*.
6. ***Ton Schotten***: *Vlakvullingen*.

   Islamathematica versus herkenbare vlakvullingen - wiskunde, wiskunst of kunst?

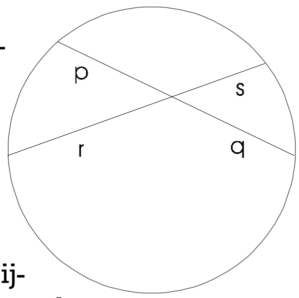
... en als de tijd het toelaat ook nog:

7. ***F. van der Blij***: *Vijf-, zeven- en andere hoeken*.

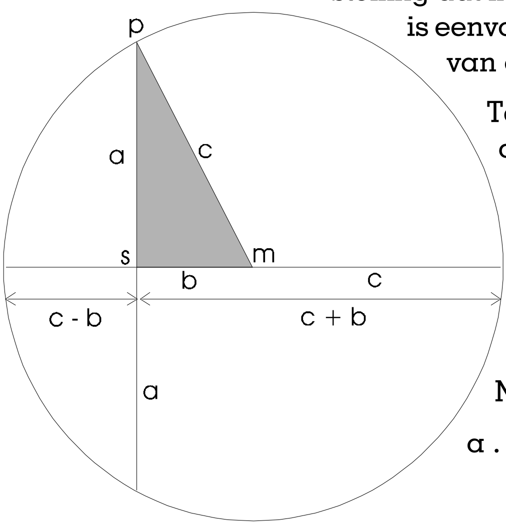
De stelling van Pythagoras

Als aanloopje naar de lezing van Jos de Mey twee bewijzen van de befaamde stelling: een minder bekend en een heel oud bewijs.

Bewijs I



In de loop van de eeuwen zijn honderden bewijzen voor de stelling van Pythagoras bedacht. Of dit bewijs daar al bij is weet ik niet. Het is wel een merkwaardig bewijs omdat alleen gebruik wordt gemaakt van de bekende stelling dat in een crikel p . q = r . s. Deze stelling is eenvoudig te bewijzen en is onafhankelijk van de stelling van Pythagoras.



Teken een rechthoekige driehoek met zijden a, b en c. Teken een cirkel met als middelpunt het rechter hoekpunt op de basis en met een straal gelijk aan c. Trek een middellijn die door de basis b gaat.

Verlengen we a tot de cirkel gesneden wordt dan is dit verlengde ook gelijk aan a. In de figuur lezen we af dat de middellijn verdeeld wordt in de stukken c - b en c + b.

Nu passen we de stelling uit de eerste figuur toe:

$a \cdot a = (c - b)(c + b) \; \text{--->} \; a^2 + b^2 = c^2$.

J.A.F. de Rijk

Bewijs II

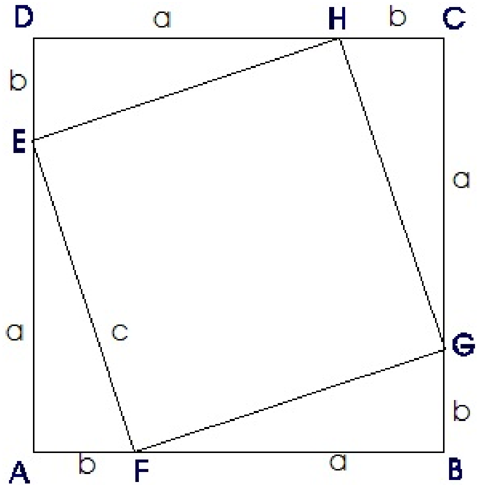
Oppervlakte ABCD = 4 x oppervlakte EAF + oppervlakte EFGH:

$(a + b)^2 = 4 \times \frac{1}{2} ab + c^2$ ---> $a^2 + 2\,ab + b^2 + 2\,ab + c^2$. Ofwel:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dit elegante bewijs - wellicht bekender dan het vorige - is volgens de auteur van *Vedische Mathematica*, Bharatic Krsna Tirthaji, veel ouder dan Pythagoras!

H.P. van Tongeren



Een lesje perspectief

Bij wijze van smaakmaker voor het ochtendprogramma over perspectief alvast onderstaande prent, afkomstig uit *Analysis of Beauty* (1753) van William Hogarth; zie het vermaan in het onderschrift!

Konijnen, goud en andere mooie zaken

In de periode van 1 februari tot 19 mei 1997 was er in de Staatsgalerij in Stuttgart de tentoonstelling "Magie der Zahl in der Kunst des 20. Jahrhunderts".

Ik heb de tentoonstelling niet gezien, maar de catalogus ligt voor me. Bijna twee kilo, ruim 350 pagina's en honderden afbeeldingen. Er is een indeling in elf secties, ik noem er maar enkele: Die Zahl in der Natur, Die Zahl als Fundobjekt und Zufallsmodell enzovoorts. Behalve afbeeldingen bevat de catalogus nog een tiental verhandelingen van kunstenaars en anderen over het thema, een lijst van een vijftigtal uitgestalde kunstboeken over het thema en een lijst van een vijftigtal titels aangeduid als "Literatur zum Thema". Er is voor liefhebbers dus werk aan de winkel.
In de rubriek Die Zahl in der Natur vinden we enkele werken van Mario Merz. Zowel in zijn iglo "Pythagoras Haus" als in "Krokodil mit Fibonaccireihe", maar ook in veel andere werken van deze kunstenaar, komt de rij van Fibonaccigetallen voor. Jaren geleden was één van deze objecten in Sonsbeek (Arnhem) ook te zien, de krokodil hangt fraai in het museum in Ascona.
(Mocht U oude kranten bewaren, het Cultureel Supplement van de NRC-Handelsblad van 21-2-1997 is geheel aan deze tentoonstelling in Stuttgart gewijd.)

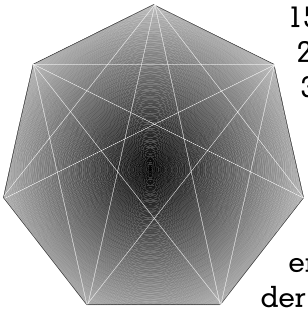
De rij van Fibonacci, gemeenzaam ook de rij van de konijnengetallen genoemd is welbekend:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 , 987, 1597, ...
Enige inventiviteit brengt ons op het idee de quotienten van opeenvolgende termen te berekenen, de eersten laat ik maar even weg maar begin met
377/233 = 1.6180257...
610/377 = 1.6180371...
987/610 = 1.6180327...
1597/987 = 1.6180344...

Het lijkt er op dat een limiet bestaat en zelfs dat deze gelijk is aan het getal dat bij de gulden snede hoort:
½ + ½ sqrt (5) = 1.6180339...
We schetsen voor de lezer een bewijs van dit vermoeden.
In formules uitgedrukt wordt de rij van Fibonacci bepaald door
$t(n+2) = t(n+1) + t(n)$.

Zou voor één of andere waarde van x de meetkundige rij $t(n) = x^n$ een oplossing kunnen zijn? Even invullen, iets buiten haakjes brengen enzovoorts laat zien dat $x^2 - x - 1 = 0$.
Deze vierkantsvergelijking heeft twee oplossingen :
$p = ½ + ½\, sqr(5)$ en $q = ½ - ½\, sqr(5)$.
Wanneer we nu substitueren
$t(n) = A\,p^n + B\,q^n$
zien we dat deze uitdrukking voor alle waarden van A en B ook een oplossing is. Willen we met twee gegeven getallen als beginwaarden starten, dan behoeven we alleen de A en B goed te kiezen.
Met deze formule is het eenvoudig te bewijzen dat $t(n+1) / t(n)$ als regel tot p nadert; immers de absolute waarde van p is groter dan de absolute waarde van q. Voor een beetje grote waarden van n is $t(n)$ practisch gelijk aan $A\,p^n$.

De Utrechtse kunstenaar Waldy Vastrick onderzocht een rij gebouwd door afwisselend de som van twee en van drie vorige termen te nemen, dus beginnend met 1, 1, 1 verder gaand met
1 + 1 = 2
1+ 1 +1 = 3.
En dan opnieuw, er staat nu 1, 1, 1, 2, 3,
2 + 3 = 5
1 + 2 + 3 = 6
en dan weer, er staat nu 1, 1, 1, 2, 3, 5, 6,
5 + 6 = 11
3 + 5 + 6 = 14.
Zo krijgen we de volgende rij
1, 1, 1, 2, 3, 5, 6, 11, 14, 25, 31, 56, 70, 126, 157, 283, 353, 636, 793,....

Het is nu de moeite waard weer de quotienten van opvolgende termen te berekenen.
Ze naderen nu echter niet tot een vaste waarde, maar



157/126 = 1.24603...
283/157 = 1.80254...
353/283 = 1.24734...
636/353 = 1.80169...
793/636 = 1.24685...

Toch wel opvallend, en zouden we veel verder gaan dan krijgen we toch sterk het idee dat er twee getallen zijn die om beurten benaderd worden. Verder rekenen geeft als bijzondere getallen

$$u = 1.24698... \text{ en } v = 1.80193...$$

Het quotient van twee termen waarbij we er één overslaan geeft

$$w = u \cdot v = 2.24698...$$

Het is inderdaad te bewijzen dat onze vermoedens juist zijn.

Maar hebben u en v ook nog andere eigenschappen? Met wat handig rekenen is weer een vermoeden te formuleren dat met wiskundige hulpmiddelen bewezen kan worden. De getallen $-u$, v en $1 / w$ zijn de drie wortels van een eenvoudige derde-graads-vergelijking:

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0.$$

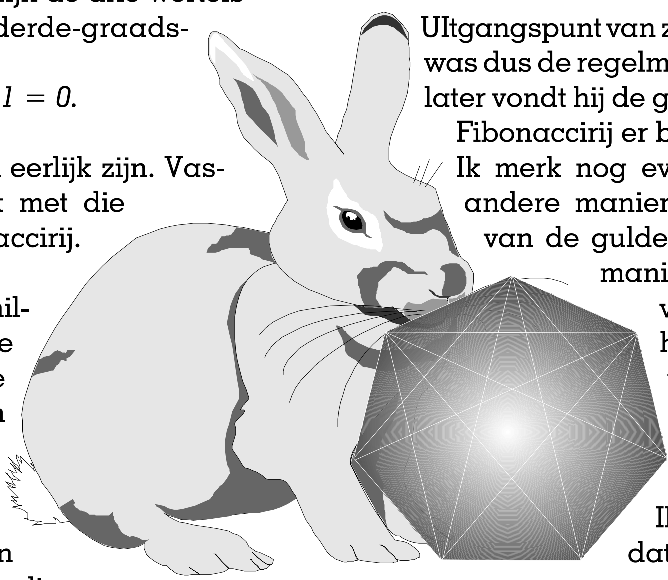
Maar nu moet ik toch even eerlijk zijn. Vastrick begon helemaal niet met die generalisatie van de Fibonaccirij.
Het begon heel anders.
In de theorie van de schilderkunst is de gulden snede een veel gebruikt begrip. De gulden snede wordt dan bijna altijd gezien in het kader van de regelmatige vijfhoek. De verhouding waarin twee diagonalen elkaar verdelen en de verhouding van de lengten van een zijde en een diagonaal in een regelmatige vijfhoek is het getal van de gulden snede ½ + ½ sqr (5). En Vastrick vroeg zich af of uit de regelmatige zevenhoek ook niet een bijzondere verhouding af te leiden was.

Het ligt dan voor de hand de verhoudingen van de lengten van zijde tot kleine diagonaal tot grote diagonaal te onderzoeken.

Een methode is natuurlijk een flinke zevenhoek te tekenen en dan gewoon op te meten. Maar dat zal geen erg nauwkeurig resultaat geven.

Met wat goniometrie gaat het beter. Als U de ouderwetse schoolstof nog kent, weet U dat de sinus van een hoek iets te maken heeft met de koorde in een cirkel met straal 1, die bij die hoek hoort. Gebruiken we deze formules dan vinden we dat de lengten van zijde tot korte diagonaal tot lange diagonaal in de regelmatige zevenhoek is als
$\sin(\alpha)$: $\sin(2\alpha)$: $\sin(3\alpha)$, waarbij $\alpha = 180 / 7$ graden.
Snel de rekenmachine en we vinden
korte diagonaal / zijde is 1.80193..
lange diagonaal / korte diagonaal is 1.24697...
En die getallen zagen we al eerder.

Vastrick gebruikt deze verhouding, die dus uit de regelmatige zevenhoek stamt zowel in zijn schilderijen als in ander ontwerpwerk.
In de Nieuwe Wiskrant 14de jaargang nummer 2, pagina 34 -38 vindt U er meer over.



UItgangspunt van zijn onderzoekingen was dus de regelmatige zevenhoek en later vondt hij de generalisatie van de Fibonaccirij er bij.
Ik merk nog even op dat dit een andere manier van generalisatie van de gulden snede is dan de manier die Dom Hans van der Laan met het plastisch getal voorstelde, waar ik al eerder in Arthesis over schreef.

Ik moet bekennen dat ik in kladjes een generalisatie van de Vastrick-procedure naar veelhoeken met een groter oneven aantal zijden heb liggen, ik kwam er nog niet toe het uit te schrijven. Er zijn wel algemene stellingen te bewijzen.

Maar zullen we dat maar aan de mathesis overlaten, wie weet doet de ars er toch nog eens iets mee.

F. van der Blij

De Ars et Mathesiskaarten kunnen nog steeds worden besteld, als set van 3 voor fl 10,- (inclusief verzendkosten); **de opbrengst komt ten goede aan de StichtingArs et Mathesis.** Zie de vorige twee Arthesis-nummers.
Ook op 8 november a.s. op de Ars et Mathesisdag zullen de kaarten verkrijgbaar zijn.

Stichting Ars et Mathesis

Inlichtingen en aanmelding als donateur, evenals kopij voor Arthesis:
Beverodelaan 205, 6952 JH Dieren, tel. 0313-413307.
Financiële bijdragen (minimumdonatie fl 30,- per jr) kunnen worden overgemaakt op bankrekeningnummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn; het gironummer van de ABN/AMRO-bank te Baarn is: 32750. S.v.p. duidelijke vermelding van uw eigen naam en adres, en van "Ars et Mathesis".