# Arthesis

Mededelingenblad
van de Stichting
Ars et Mathesis

redaktieadres:
Nieuwstraat 6
3743 BL Baarn

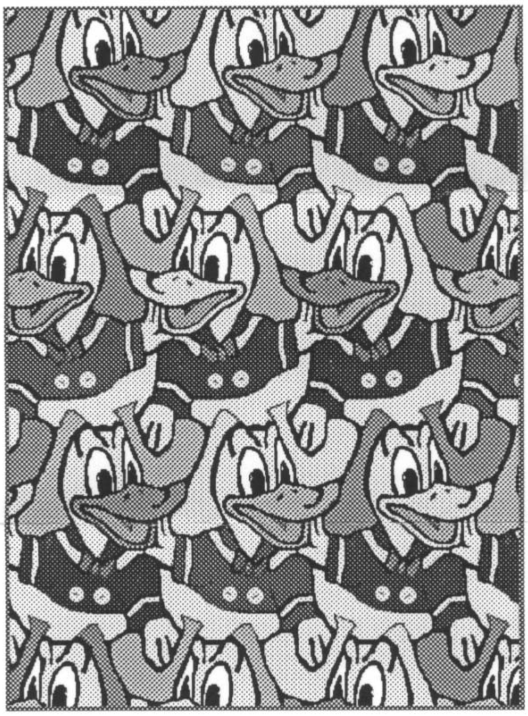
jaargang 10
nummer 3
augustus 1996

TWEE PROGRAMMA'S IN DE ESCHER-SFEER

In mei jl. kwamen er twee CD-ROM's op de markt gericht op de Escher-liefhebber. BRUNA bracht het programma ESCHER INTERACTIEF uit en DOMUS het programma SPIEGELKUNSTENAAR. De prijzen voor de CD-ROM's bedragen fl 119,90, respectievelijk Fl 49,95, inclusief BTW.

ESCHER INTERACTIEF

De BRUNA-schijf is met medewerking van de Escher-stichting tot stand gekomen. Als we het programma opstarten verschijnt er een openingsscherm met toegangsmogelijkheden tot liefst negen modules van het programma. Je komt van alles te weten over het leven en werk van de graficus M.C. Escher. Er zijn zo'n 600 kunstwerken te bekijken, die als BMP-formaat op de CD-ROM zijn opgeslagen. Er is een filmpje waarin we Escher zelf aan het werk zien!
Er is een module "Animaties" waarin een zestal prenten als bewegende driedimensionale figuren worden getoond. Leuk is het effect van de bolspiegel die je met de muis over een achttal prenten kan bewegen en die zorgt voor een plaatselijke uitstulping, zoals Escher dat zelf deed bij zijn litho "Balkon".
Eén van de modules is een spel waarbij geraden moet worden of een kubus een holle dan wel een bolle vorm heeft. Regelmatige vlakvullingen lenen zich goed voor het maken van zgn. 3-D-animaties. In de module "Magische Beelden" zijn in een zestal afbeeldingen werken van Escher verborgen. Met de module "Morphing" kan je figuren van de ene regelmatige vlakverdeling over laten gaan in een andere. In de module "Onmogelijke Puzzels" word je uitgedaagd om uit losse onderdelen zelf 16 onmogelijke figuren te construeren.
In de module "Vlakverdelingen" kun je volgens 9 systemen voor regelmatige vlakvullingen zelf tekeningen maken. Een fascinerende bezigheid! De plaatjes worden, zoals bij het programma CorelDraw, getekend met krommen waarvan de ligging bepaald wordt door knooppunten. Door de knooppunten te verplaatsen wijzigt de figuur; en niet alleen op de plek waar wordt getekend maar ook op de andere plaatsen volgens het gekozen systeem. Als de omtrek van de figuur af is kan deze worden ingekleurd met 16 verschillende kleuren. Met stempels kun je binnen de figuur nog oogjes e.d. aanbrengen. Dat kan alleen in zwart. Vier van de 9 systemen zijn optisch verschillend maar principieel gelijk zodat er eigenlijk volgens vijf verschillende systemen kan worden getekend. Er worden 3 herhalingsvormen gebruikt: ruit, rechthoek en vierkant.
Het is jammer dat je slechts 24 tekeningen kunt bewaren en daarna nog verder bewerken. Heb je meer tekeningen dan moet je ze opslaan met een door het programma bepaalde naam: tshirtxx.bmp-formaat, waarbij de programmamakers er kennelijk van uitgaan dat dit de bestemming van het drukwerk is. Wil je een door Escher gemaakte voorbeeldtekening afdrukken dan geeft het programma niet thuis: om copyright-technische redenen mogen de Escherafbeeldingen niet worden opgeslagen en afgedrukt. Dat doet wat krampachtig aan: 9 tekeningen zijn niet af te drukken, maar verder zijn alle 600 op de CD-ROM staande bmp-plaatjes eenvoudig via bv. Paintbrush of CorelPaint af te drukken!



SPIEGELKUNSTENAAR*

Op de DOMUS-schijf biedt het programma de SPIEGELKUNSTENAAR de mogelijkheid om volgens maar liefst l7 verschillende spiegelsystemen Escher-achtige regelmatige vlakvullingen te maken, zoals de nevenstaande Donald Duck-figuren. Er worden 5 herhalingsvormen gebruikt: parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant en regelmatige zeshoek. Dit programma is pixel georiënteerd en slaat de plaatjes op in een eigen TCS-formaat (Tiling Construction Set), dan wel in BMP-formaat. In een aantal voorbeeldfilmpjes wordt uitgelegd hoe je patronen en figuren kunt ontwerpen.
Er zijn functies om willekeurige lijnen te tekenen, om rechte lijnen te trekken, om cirkels te maken, om vlakken in te kleuren en om teksten in te brengen. Wil je tot op pixel-niveau werken dan kun je inzoomen.
Je kunt met 228 kleuren werken. Gedurende het tekenen kun je van tekensysteem wisselen en de afmetingen van de herhalingsvorm wijzigen. Is de tekening klaar dan kun je deze, voorzien van een eigen tekst, afdrukken via de zgn. Kaartendrukkerij. Het programma telt 23 voorbeeldkaarten en verder 93 plaatjes in bmp-formaat. In een uitgebreide handleiding wordt uitleg gegeven over alle 17 spiegelsystemen.

C.J. Fassbinder

** Naschrift redactie: Voor “beginners” is dit programma tamelijk moeilijk.*

EEN ONOPGELOST PROBLEEM IN HET DOMEIN VAN DE VLAKVERDELINGEN (3)

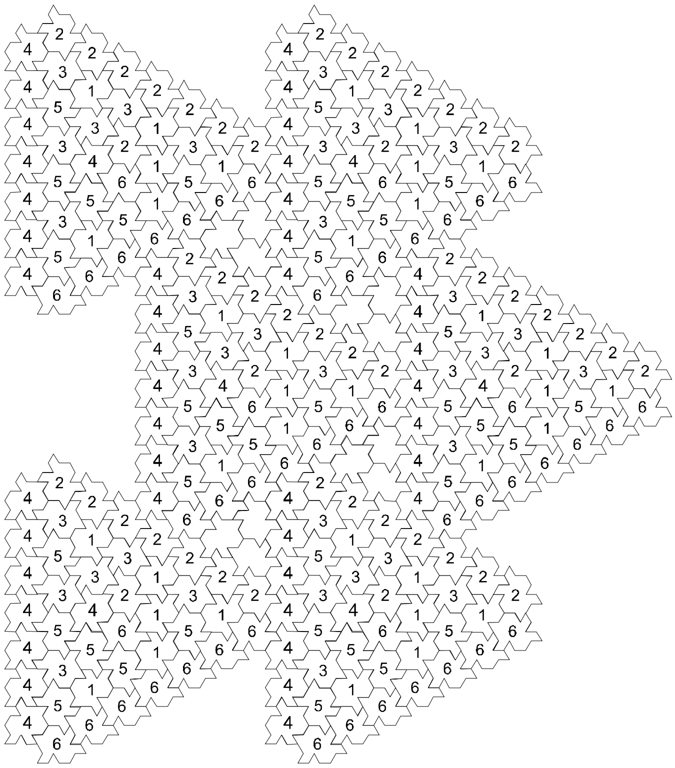
Van dit artikel - gebaseerd op de lezing op de Ars et Mathesisdag op 11-11-1995 en verder uitgebreid met enkele wetenswaardigheden - stonden deel 1 en 2 in de vorige Arthesis-nummers; hieronder het laatste deel.

c. Periodiciteit

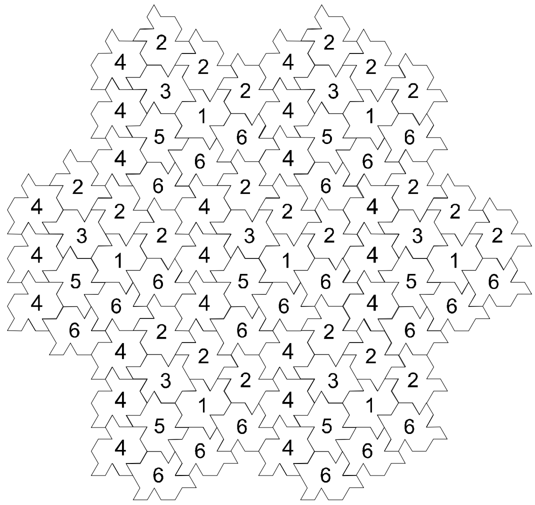
Is deze vlakverdeling nu periodiek? Het antwoord is neen. Kijken we naar een driehoek van 7 eendjes hoog, dezelfde driehoek staat ernaast, volledig identiek. Dus op het eerste zicht toch periodiek. De top van de driehoek is echter in het ene geval zwart, bij de andere wit. Nu kan men zeggen: kijk dan naar de grotere driehoek van 15 eendjes hoog, ernaast (buiten de prent) ligt weer zo'n driehoek van 15 hoog identiek hetzelfde, en de kleine driehoeken van 7 hoog komen beide voor, dus toch periodiek. Neen, want de ene grote driehoek van 15 eendjes lang heeft een zwarte top, de andere zal automatisch een witte top hebben. Dus kijken we naar een driehoek van 31 hoog, enz., enz. Uiteindelijk blijkt dat als we zo doorgaan tot in het oneindige, de vlakverdeling niet periodiek is, maar dat eender welk gedeelte wat we nemen van deze vlakverdeling, hoe groot dit ook is, toch nog oneindig keren voorkomt. Maar de totale vlakverdeling is niet periodiek.
Samengevat: we hebben een gedwongen (op de centrale rij na), niet-periodieke vlakverdeling gemaakt met slechts 1 tegel.

d. A-periodieke verzameling

De laatste stap nu is, bewijzen dat alle vlakverdelingen die we kunnen maken met deze eendjes niet-periodiek zijn. Dan pas is de verzameling van alle vlakverdelingen met deze eendjes a-periodiek.
Helaas kunnen we dit niet bewijzen want we kunnen met tegenvoorbeelden aantonen dat er ook periodieke vlakverdelingen mogelijk zijn. We hadden al gezegd dat de opeenvolgingen van 2^n-1 eendjes ons nog parten zou spelen. Want wat blijkt: Als we gelijkzijdige driehoeken vormen waarvan de zijden een lengte hebben van 2^n -1 eendjes, dan kunnen we steeds hiermee een periodieke vlakverdeling maken.



lengte van de zijden van de driehoeken: 2^3 -1 eendjes

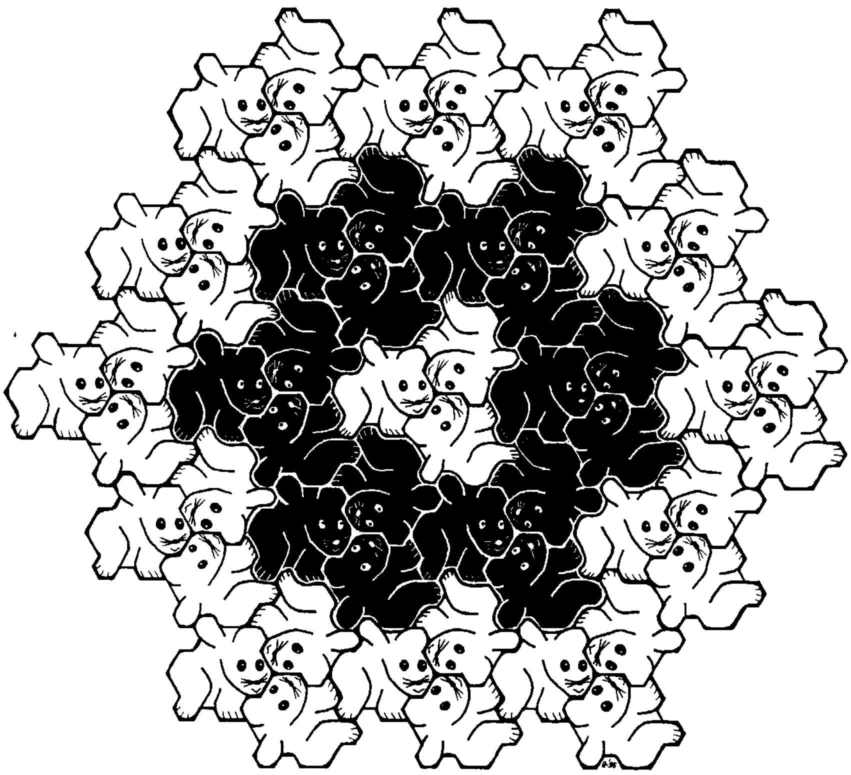


lengte van de zijden van de driehoeken: 2^2 -1 eendjes

Met één van deze periodieke vlakverdelingen werd ook een prent gemaakt, zie hieronder (lengte van de zijden van de driehoeken 2^1-1). De eendjes zijn inmiddels vervormd tot een soort knuffeldier. Het probleem van de a-periodieke vlakverdeling met maar 1 tegel is dus nog steeds onopgelost.

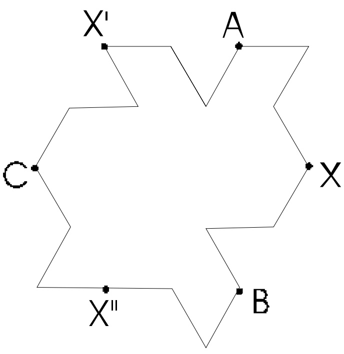
4. Nawoord

a. Type p3



Mevr. Doris Schattschneider (USA) herkende in de eendjes een tegel van het type p3.

Tegel van het type p3: ABC is een gelijkzijdige driehoek, X een willekeurig punt. De kurve AX wordt geroteerd over 120§ rond A. X' is het beeld van X na rotatie. De kurve CX' (deze kurve moet niet dezelfde te zijn als de kurve AX) wordt geroteerd rond C. De kurve BX" wordt geroteerd rond B. Met de tegel die nu ontstaan is kan er een vlakverdeling gemaakt worden door 120^o rotaties rond de punten A, B en C. Deze vlakverdeling (zie prent "knuffeldier") is een van de vele periodieke vlakverdelingen die we kunnen maken met deze tegel. Anderzijds is het zo dat niet alle tegels van type p3 aanleiding geven tot een niet-periodieke v1akverdeling. Escher kende dit type tegel ook, hij leerde het kennen via een artikel geschreven in 1924 door de Duitse Professor F. Haag en gebruikte het later in de litho "Reptielen".



In nr 1 van deze Arthesis-jaargang stond een muzikaal zoekplaatje (“Veel violen”). Voor wie zich nog steeds afvraagt wat de goede uitkomst was: er speelden 16 strijkkwartetten in het vierkant!

om alvast in de agenda’s te zetten!
Ars et Mathesisdag 1996:
zaterdag 9 november
in het Brandpunt te Baarn

b. Op zoek naar andere tegels

De eenden-tegel werd gevonden door middel van het plaatsen van pijlen in zeshoeken en dit op een willekeurige manier. De zeshoeken werden verplicht te pijlen te volgen door het plaatsen van driehoekjes, maar zowel de vorm van de driehoekjes als de plaats waar we de driehoekjes zetten waren niet verplicht. We kunnen evengoed de driehoekjes bv. in het midden van de zijden van de zeshoeken plaatsen of geen driehoekjes gebruiken maar een totaal andere vorm. Door te experimenteren met andere plaatsen en vormen kunnen we verschillende figuren vormen maken, zoals eenden of knuffeldieren.
We zouden nu kunnen trachten andere tegels te vinden door de pijlen in andere richtingen te plaatsen. Dit is echter vrij tijdrovend, daarom werd gezocht naar een eenvoudiger manier.

We kunnen de zeshoeken beschouwen als een binair getal van zes cijfers lang, telkens als een zijde van de zeshoek een uitstulping (bv. een driehoekje) heeft krijgt het de waarde 1, heeft het een instulping dan heeft het een waarde 0. De eenden-tegel komt zo overeen met het binair getal 001011. De andere oriëntaties van de eend komen dan overeen met 010110, 101100, 011001, 110010 en 100101.
Vanzelfsprekend is de keuze om aan een uitstulping de waarde 1 te geven volledig arbitrair, we hadden evengoed voor een uitstulping een 0 kunnen geven en voor een instulping een 1. Dus de eenden-tegel kan ook geschreven worden als 110100. Voor de verschillende oriëntaties geldt hetzelfde, dus de tegel komt overeen met 12 verschillende binaire getallen. Om een één-één relatie te verkrijgen tussen tegels en binaire getallen spreken we af dat een tegel overeenkomt met het kleinst mogelijke binaire getal, in ons geval dus 001011.
Een zeshoek heeft zes zijden en dus zijn er 2^6=64 verschillende combinaties mogelijk, maar rekening houdend met het bovenstaande zijn er nog maar 8 verschillende tegels mogelijk. Deze zijn 000000, 000001, 000011, 000101, 000111, 001001, 001011 en 010101.
Als we deze 8 mogelijkheden verder onderzoeken blijkt dat er met een aantal geen vlakverdeling mogelijk is, nl. met 000000, 000001, 000011(gedeeltelijke vlakverdeling, het is onmogelijk het volledig vlak te bedekken, er ontstaan onopvulbare gaten), 000101 en 001001. Verder geven 000111 en 010101 triviale vlakverdelingen. Enkel 001011 resulteert in meer bijzonder vlakverdelingen.

c) Aantal eendjes

Als we geen rekening houden met de centrale zwarte rij van eendjes dan komen zwarte eendjes juist evenveel voor als witte. Kijken we naar de verschillende oriëntaties van eendjes, dan is dit ook het geval. Het aantal eendjes van elke oriëntatie is gelijk, als we de centrale rij niet meetellen.

d) Verdere eigenschappen?

Indien er mensen zich geroepen voelen om de niet-periodieke vlakverdeling op computer te programmeren om zo het verdere verloop van de vlakverdeling duidelijk te maken of mensen die nog verdere eigenschappen of bijzonderheden in de vlakverdeling zien, mogen ze hun resultaten steeds sturen naar de redactie van Ars et Mathesis of naar P. Raedschelders, Onze Lieve Vrouweplein 15-1, 9150 Kruibeke, België, met hartelijke dank.

5 Referenties

- M.C.Escher, Visions of Symmetry, Doris Schattschneider, W.H. Freeman and Co, New York, 1990
- Tilings and Patterns, Gr‹inbaum and Shephard, W.H. Freeman and Co, New York, 1987
- Persoonlijke korrespondentie met Mevr. D. Schattschneider, 1995

Peter Raedschelders

Cursus cultuurgeschiedenis van de wiskunde in Nijmegen

De interfacultaire werkgroep Wetenschap en Samenleving van de Katholieke Universiteit Nijmegen organiseert in het eerste semester van het cursusjaar 1996-1997 een cursus "Cultuurgeschiedenis van de wiskunde". De cursus behandelt de verschillende vormen waarin wiskunde zich in de West-Europese cultuur heeft gemanifesteerd, en gaat in op de wisselwerking tussen wiskunde en cultuur vanaf de middeleeuwen tot heden.
De cursus begint dinsdag 10 september 1996 en zal op dertien dinsdagochtenden van 10:45 tot 12:30 plaatsvinden. Daarnaast bestaat de mogelijkheid om op een nader te bepalen tijdstip een serie van 6 werkcolleges te volgen waarin het historisch bronnenmateriaal onder de loupe zal worden genomen.

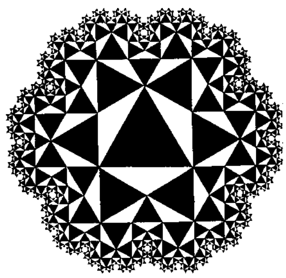
Mensen van buiten de universiteit kunnen zich voor deze cursus aanmelden via het H.O.V.O.:
Thomas van Aquinostraat 5, tel. 024-3613083.

STERFRACTALS EN AANVERWANTEN

"Een fractal is een meetkundige figuur, die zichzelf tot in het oneindig kleine herhaalt" (H.Lauwerier, Fractals,1989). Ik raakte in fractals geïnteresseerd toen er één onbedoeld onder mijn handen ontstond bij het ontwerpen van een blikvanger op een kerstprogramma. Een zespuntige ster liet ik raken aan zes dito kleinere en het omkransen met steeds kleinere sterren hield ik vol tot ze niet meer nauwkeurig konden worden getekend. Om de figuur uit te ontwikkelen tot fractal had ik weliswaar mijn werkwijze tot in het oneindige moeten voortzetten, maar ik overwoog dat het nog ontbrekende slechts weinig zou toevoegen aan het beeld dat ik al had. Dat resultaat boeide me dermate, dat ik besloot de geschetste manier van (bijna) fractalontwikkeling nader te onderzoeken en na te gaan wat daarbij de variatiemogelijkheden waren. Ik ontdekte een categorie interessante figuren van hoog esthetisch gehalte, hetgeen hoop ik bijgevoegde illustraties mogen aantonen.

fractalmotief

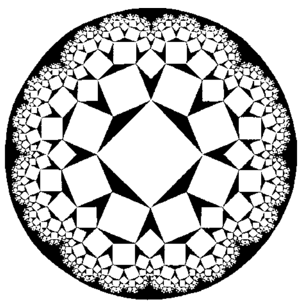
Eigen aan al deze figuren is dat een centraal motief wordt omgeven door kransen van transformaties, die tezamen een geometrisch patroon vormen met radiale symmetrie. In het vervolg zullen we een krans van transformaties van dezelfde grootte een generatie noemen. De fractal is voltooid als het aantal generaties $n \to \infty$, hetgeen wordt gerealiseerd binnen een oppervlakte met eindige afmetingen en een limietlijn als grens. Ik vond met name regelmatige x-puntige sterren en regelmatige veelhoeken geschikte motieven om te 'fractaliseren'. Maar ook sectoren daarvan toonden zich zeer bruikbaar.



1

fractalvorm

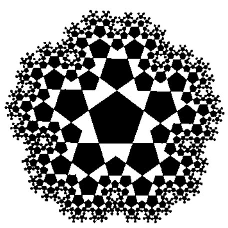
De uiteindelijke fractalvorm, het geometrisch lijnenpatroon, wordt uiteraard bepaald door de keuze van het motief. Maar een zelfde motief kan verschillende fractals opleveren, al naar de wijze waarop men de transformaties uit de opeenvolgende generaties elkaar laat ontmoeten. Voor fraai ogende resultaten luidt de eis dat dit ontmoeten slechts mag bestaan uit het gemeenschappelijk hebben van punten op de omtreklijn (zie de afbeeldingen). Een fraai meanderende limietlijn kan verder aanzienlijk bijdragen tot het genoegen dat men aan de fractal beleeft. Maar vaak zal ze "slechts" de vorm van het uitgangsmotief herhalen.



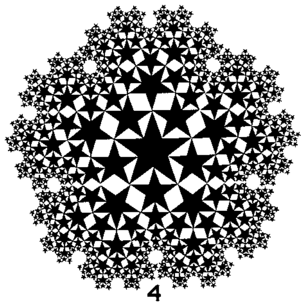
2

contractiefactor

De motieven in de opeenvolgende fractalgeneraties nemen van binnen naar buiten gestadig in grootte af. De verkleinings- of contractie-factor is constant. Natuurlijk zal een willekeurig gekozen verkleining vrijwel altijd leiden tot gedeeltelijke overlapping van motieven. Een "slechts raken" kan men alleen ver-

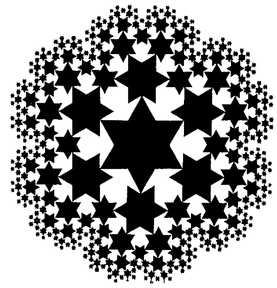


3



4

wachten, indien men de wijze van omringing van het centrale motief afleidt uit de specifiek geometrische eigenschappen daarvan. Aangezien een eerste en correcte omringing in de tweede generatie toch weer ongewenste overlappingen kan opleveren, blijft de ontwikkeling van een mooie fractal een kwestie van 'trial and error'. Maar heeft men er één gevonden waarbij elk afzonderlijk motiefje zich in het geheel voegt als een ion of molecuul in een kristalrooster, dan is de voldoening des te groter.

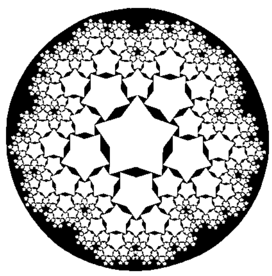


5

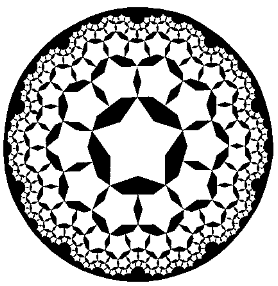
Motieven met een vijftallige symmetrie leveren een veelheid aan interessante fractals op. Het zal niemand verbazen dat er in deze categorie verschillende zijn, waarvan de afmetingen der opeenvolgende transformaties zich verhouden als de leden in de reeks van Fibonacci: contractiefactor 0,618.

interspace

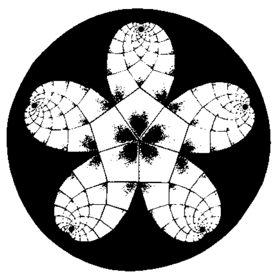
Er zijn rnotieven waarvan men de 'fractalisering' zo kan leiden dat ze samen met de opeenvolgende transformaties één gesloten vlak vormen. Alle punten binnen de limietlijn behoren dan tot de fractal (zie afb. 12). Meestal echter zullen de motieven zijn gescheiden door tussenruimten. Is het motief een ster, dan zou men van interstellaire ruimte kunnen spreken. Naar mijn ervaring behoren fractals met maar één soort gelijkvormige tussenruimten tot de fraaiste. Bij een oplopend aantal verschillende tussenruimten neemt doorgaans de orde en regelmaat in de fractal af. Hoewel de omhulling van het motief door opeenvolgende generaties in het algemeen een centrifugaal gebeuren is, komt het ook voor dat er centripetale groei optreedt. In dat geval kan bij voortschrijdende fractalontwikkeling alle eerder gevormde interspace volledig worden opgevuld. In voorbeeld 3 werd daarom deze naar het centrum gerichte groei onderdrukt.



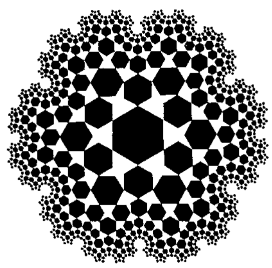
6



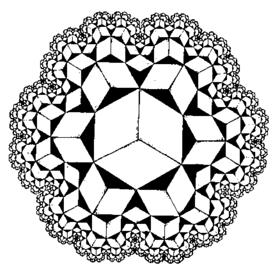
7



8



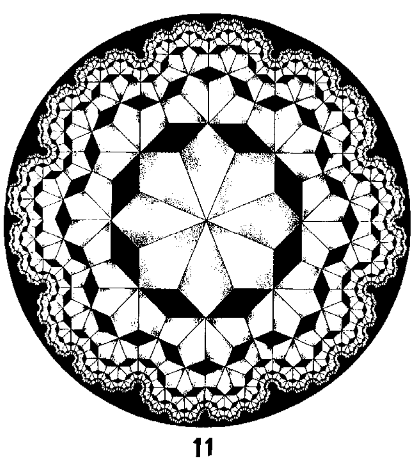
9



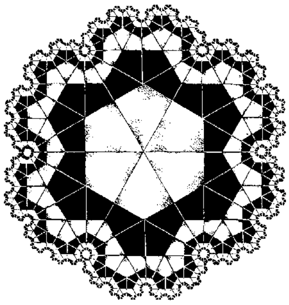
10

Escher

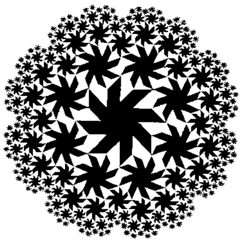
De hier beschreven fractals, die binnen een afgeperkte ruimte een oneindig aantal gelijkvormige en steeds kleiner wordende motieven bijeenbrengen, wekken herinneringen op aan soortgelijke figuren van Escher, door hem cirkellimieten genoemd. Voor het construeren van zo'n 'oneindigheidsbenadering' binnen de cirkel nam hij zijn toevlucht tot de niet-Euclidische meetkunde en moest hij een naar de rand toe steeds groter wordende deformatie van zijn motief (vis) voor lief nemen. Hoewel aanvankelijk mijn abstract geometrische figuren mij voldoende esthetisch bevredigden, besloot ik vervolgens toch na te gaan of er daaronder geschikte netwerken waren die zich voor 'vitalisatie' leenden. Als meest geschikt selecteerde ik enkele fractals met slechts één soort tussenruimte.



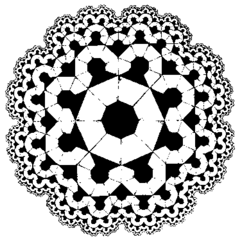
11



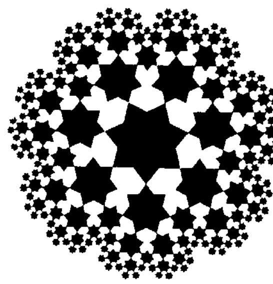
12



13

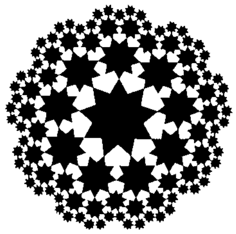


14



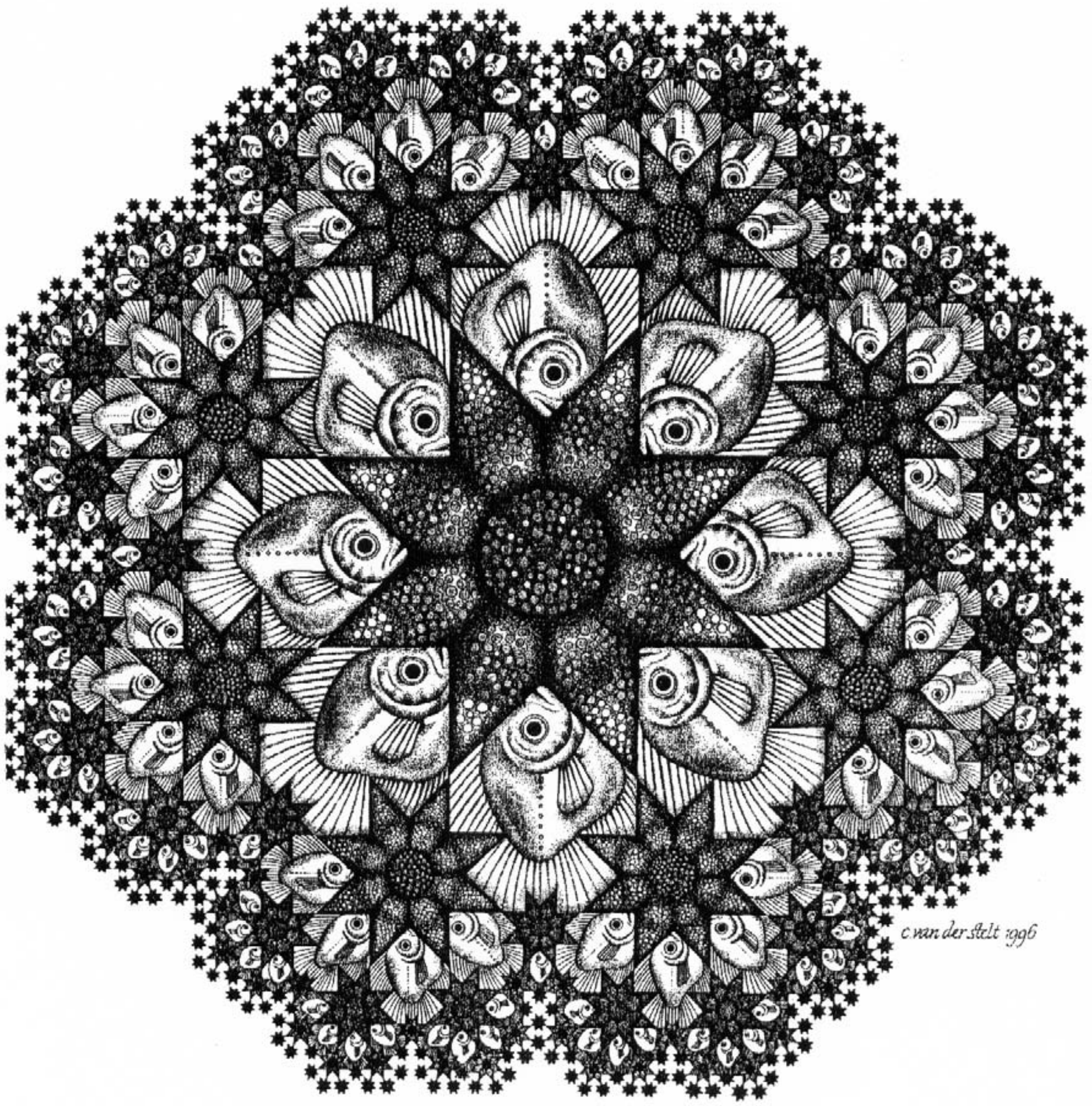
15

De sterren en veelhoeken werden her-
anemonen, terwijl daartussen bladeren,
een aaneengesloten vlak van krioelend
Bij een ideale uitvoering levert deze be-
de limietlijnen en motieven, die niet aan
werden ze tot symbolen van ideale leefwe-
elk individu, groot of klein, zijn eigen

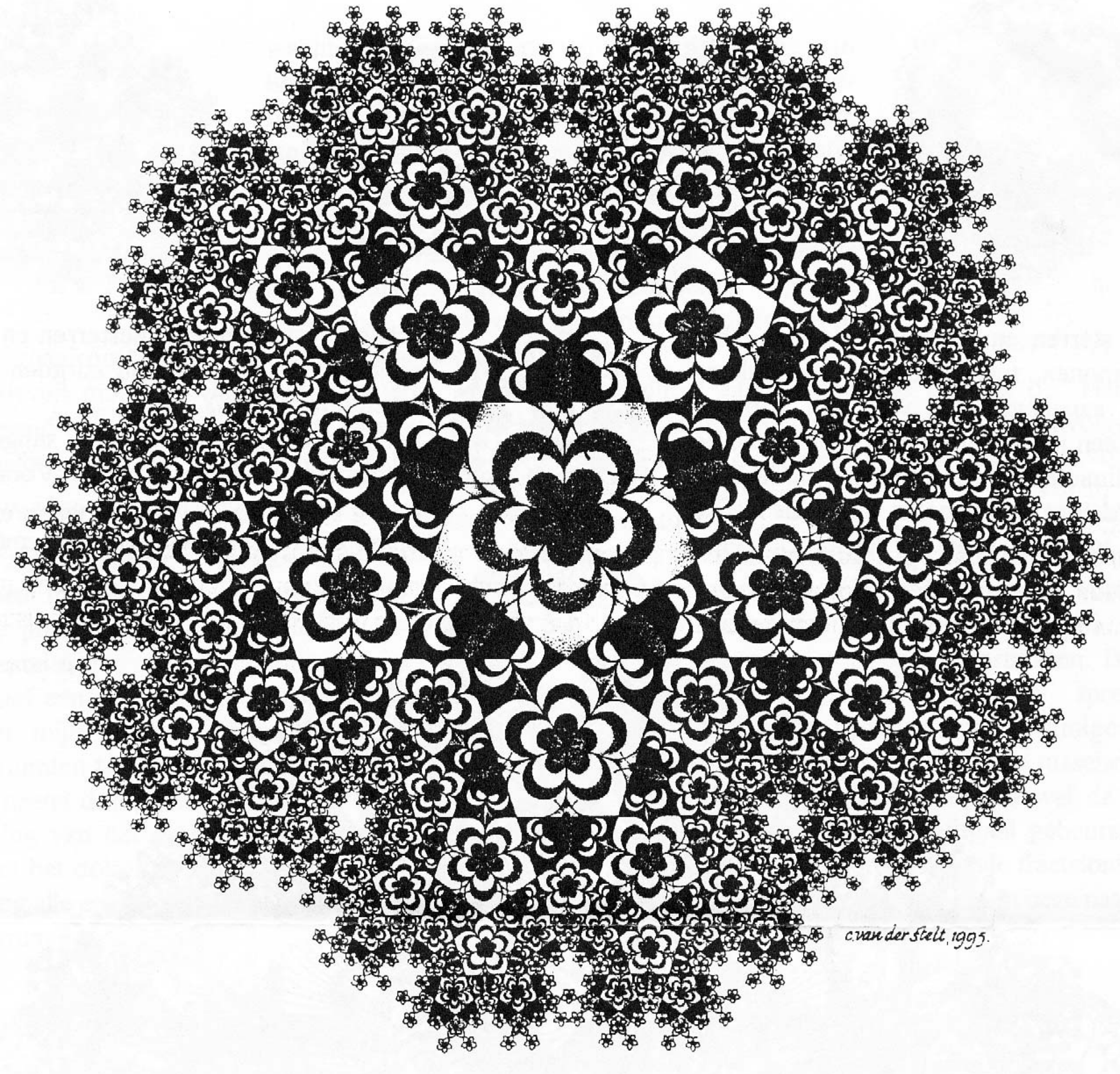


16

schapen tot bloemen, zeesterren en zee-
vlinders, kevers of vissen zorgden voor
leven (afb. 17, 18).
nadering prenten op met fraai slingeren-
deformatie onderhevig zijn. Voor mij
relden met een voorbeeldige orde, waarin
onmisbare rol speelt en plaats inneemt.



17



18

techniek

Tenslotte nog een enkel woord over de technische uitvoering van de getoonde voorbeelden. In verband met de radiaalsymmetrische opbouw ervan heb ik steeds volstaan met het op vrij grote schaal construeren van één sector van de totale figuur. Ik ging met het tekenen van de steeds kleiner wordende motieven zolang door tot ze niet meer nauwkeurig konden worden weergegeven. De zo ontstane tekening werd x-maal gecopieerd, waarna de x sectoren vervolgens tot een geheel werden samengevoegd. Deze werkwijze levert uiteraard bijna-fractals op. De computer is natuurlijk het geëigende middel om ze geheel uit te ontwikkelen. Maar wat in een computeruitdraai extra wordt toegevoegd, verandert het met de hand verkregen beeld niet wezenlijk. Wel kan met de computer worden “ingezoomed” op details, waarbij zal blijken dat de zelfgelijkvormigheid in de fractals van dit type duidelijker aan de dag treedt dan bij de meer gecompliceerde van Mandelbrot en Julia.

C. van der Stelt

Stichting Ars et Mathesis

Inlichtingen en aanmelding als donateur: Beverodelaan 205, 6952 JH Dieren, tel. 0313-413307. Financiële bijdragen (minimumdonatie fl 30,- per jaar) kunnen worden overgemaakt op bankrekeningnummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn; het gironummer van de ABN/AMRO-bank te Baarn is: 32750. S.v.p. duidelijke vermelding van uw eigen naam en adres, en van “Ars et Mathesis”.