Arthesis

Mededelingenblad
van de Stichting
Ars et Mathesis

Redaktieadres
Nieuwstraat 6
3743 BL Baarn

Jaargang 7
Nummer 2
Mei 1993

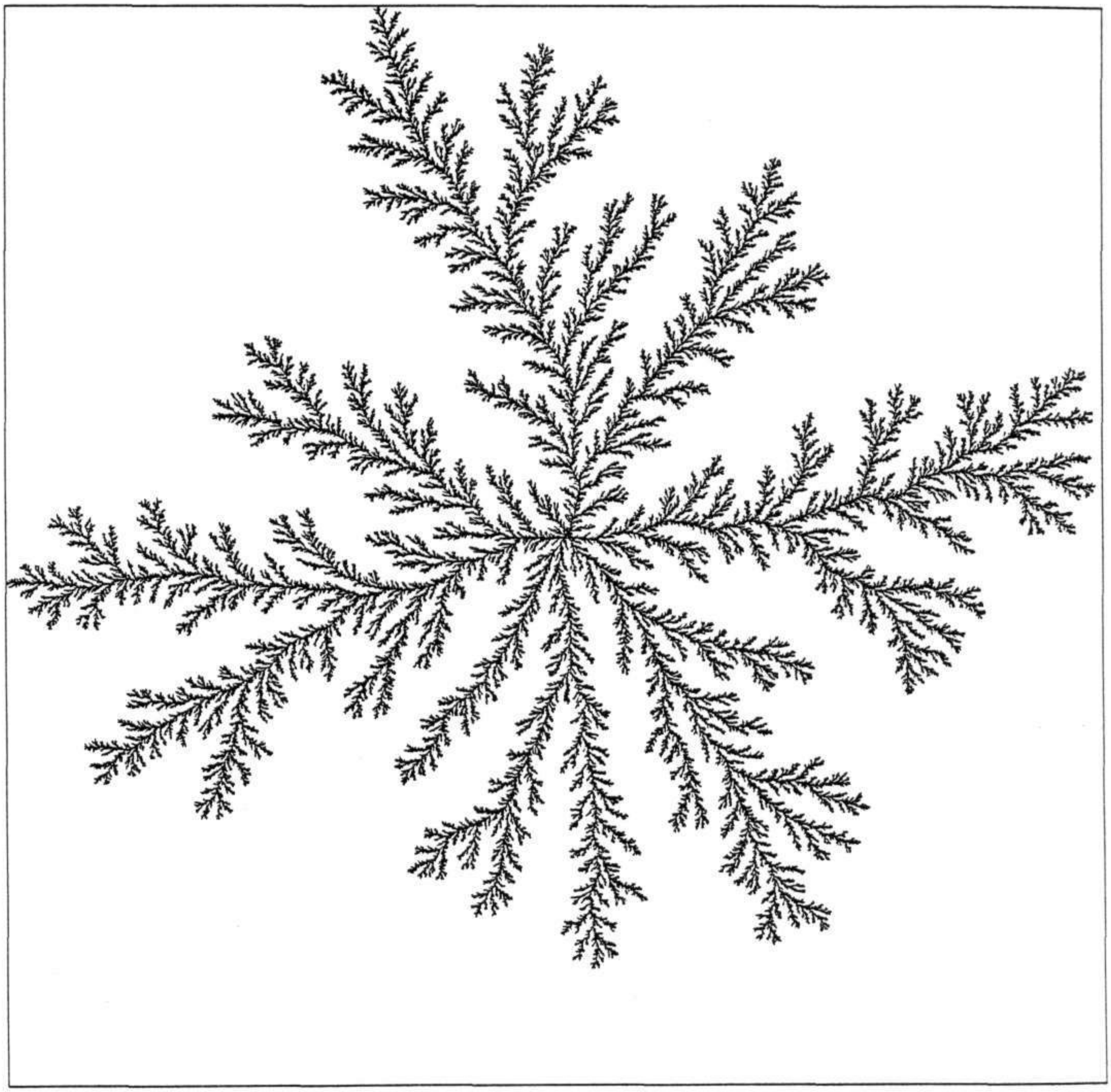
In dit nummer van Arthesis twee mededelingen en een oproep.

In de eerste plaats vindt U in dit nummer een stortingsformulier, waarmede U de donateursbijdrage kunt voldoen.
Graag Uw aandacht hiervoor, en U hoeft zich daarbij niet te houden aan het bedrag van het vorige jaar, inflatiecorrecties zijn zeer welkom!

Zaterdag 6 November 1993 vindt de jaarlijkse dag van Ars et Mathesis weer plaats in Het Brandpunt in Baarn, Oude Utrechtseweg 4a.
Noteert U deze datum alvast in de agenda!

Oproep: U wordt van harte uitgenodigd U te melden met een mogelijke bijdrage aan het programma van deze dag. Heeft U plannen of voorstellen meldt U dat dan vast even bij onze secretaris:
J.A.F. de Rijk, Stationsstraat 114
3511-EJ in Utrecht.

Op bladzijde 130 ziet U een computerplaatje. Het is de weergave van een verzameling van vijftig millioen deeltjes, die ontstaat door een groeiproces waarbij diffusie een bepalende factor is. De hoek waaronder vertakkingen plaatsvinden neigt naar een limiet van 38 graden. Zo'n model kan o.a. een verklaring geven van de vorming van sneeuwvlokken. Eigenlijk zou U het plaatje in kleur moeten zien, waarbij delen als functie van de ontstaansouderdom een andere kleur krijgen. Het is wonderlijk mooi mede door de broosheid. Het is, uitgaande van de definitie dat iets kunst is als het in een gerenommeerd museum aanwezig is, nog geen kunst, want het is zelfs nog niet eerder gepubliceerd. Dank zij Dr. P. Ossadnik van het researchinstituut in Jülich kunnen we U er van laten meegenieten. Het ziet er wel uit als wetenschap op de grens van Ars et Mathesis, vandaar.

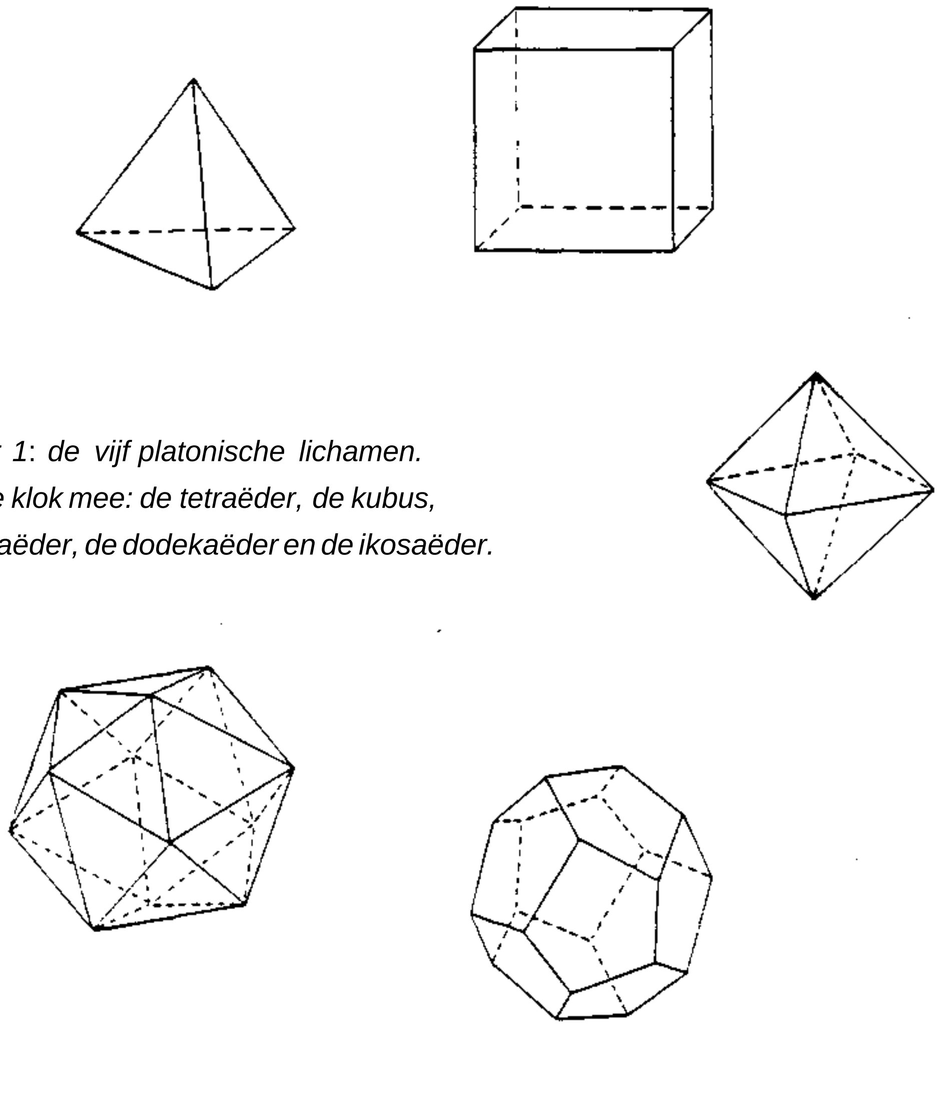


Off-lattice DLA with 51,200,000 particles
Peter Ossadnik, HLRZ, KFA Jü;ich

De schepping als mathematisch kunstwerk

Albert van der Schoot

Met de benaming *Platonische lichamen* zullen de meeste lezers van dit blad wel vertrouwd zijn, en waarschijnlijk ook wel met de vijf mathematische figuren die met die naam worden aangeduid: de *tetraëder* (het regelmatig viervlak), de *kubus* (het regelmatig zesvlak), de *oktaëder* (het regelmatig achtvlak), de *dodekaëder* (het regelmatig twaalfvlak) en de *ikosaëder* (het regelmatig twintigvlak). In figuur 1 zijn ze afgebeeld.

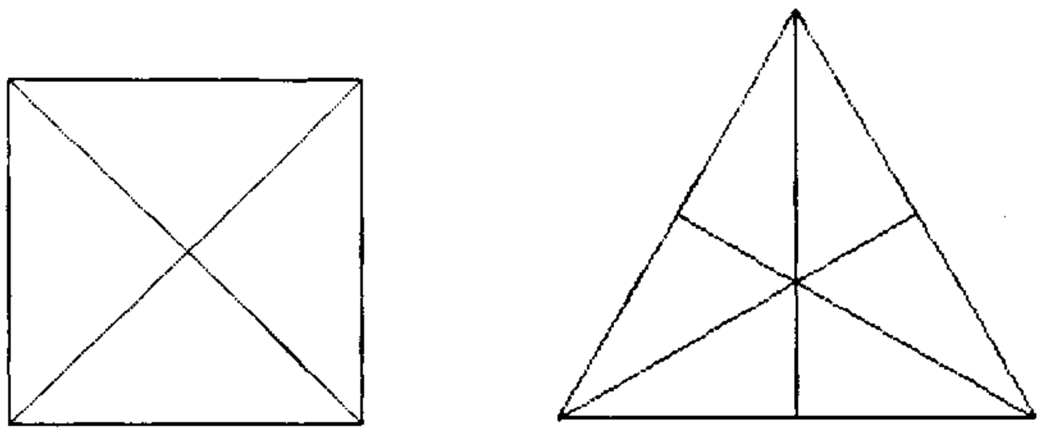


Figuur 1: de vijf platonische lichamen. Met de klok mee: de tetraëder, de kubus, de oktaëder, de dodekaëder en de ikosaëder.

Wie met het werk van Popke Bakker en Koos Verhoeff vertrouwd is, heeft deze figuren en talloze variaties daarop al vaak ontmoet. Maar wat hebben die dingen in 's hemelsnaam met Plato te maken? Waarom zijn ze naar een filosoof vernoemd?

De reden daarvoor is, dat het oudste in kopie bewaard gebleven geschrift waarin de vijf lichamen worden genoemd een van de dialogen van Plato is, de *Timaeus.* Het is een van zijn laatste geschriften, daterend van het midden van de vierde eeuw v. Chr. en daarmee nog een aantal decennia eerder geschreven dan de *Elementen* van Euklides. Veel ouder zal de bekendheid met de vijf lichamen ook niet zijn, althans niet met alle vijf; auteurs uit de latere oudheid vermelden dat de kennis van tetraëder, kubus en dodekaëder uit de pythagoreïsche traditie stamt, terwijl de ontdekking van oktaëder en ikosaëder wordt toegeschreven aan een vriend van Plato, de wiskundige Theaetetus. Bij Euklides vinden we voor het eerst het bewijs, dat er ook niet méér dan die vijf regelmatige lichamen kunnen zijn.
Dialoog is niet helemaal de juiste term om de *Timaeus* mee aan te duiden: anders dan in de meeste geschriften van Plato is Sokrates hier niet in een spitsvondige diskussie verwikkeld waarin hij uiteindelijk aan het langste eind trekt, maar is hij slechts één van de luisteraars naar de man die de hele tijd aan het woord is, de Siciliaan Timaeus. Deze legt het gezelschap uit hoe de kosmos en zijn bewoners tot stand zijn gekomen; de *Timaeus* is dus een scheppingsverhaal.

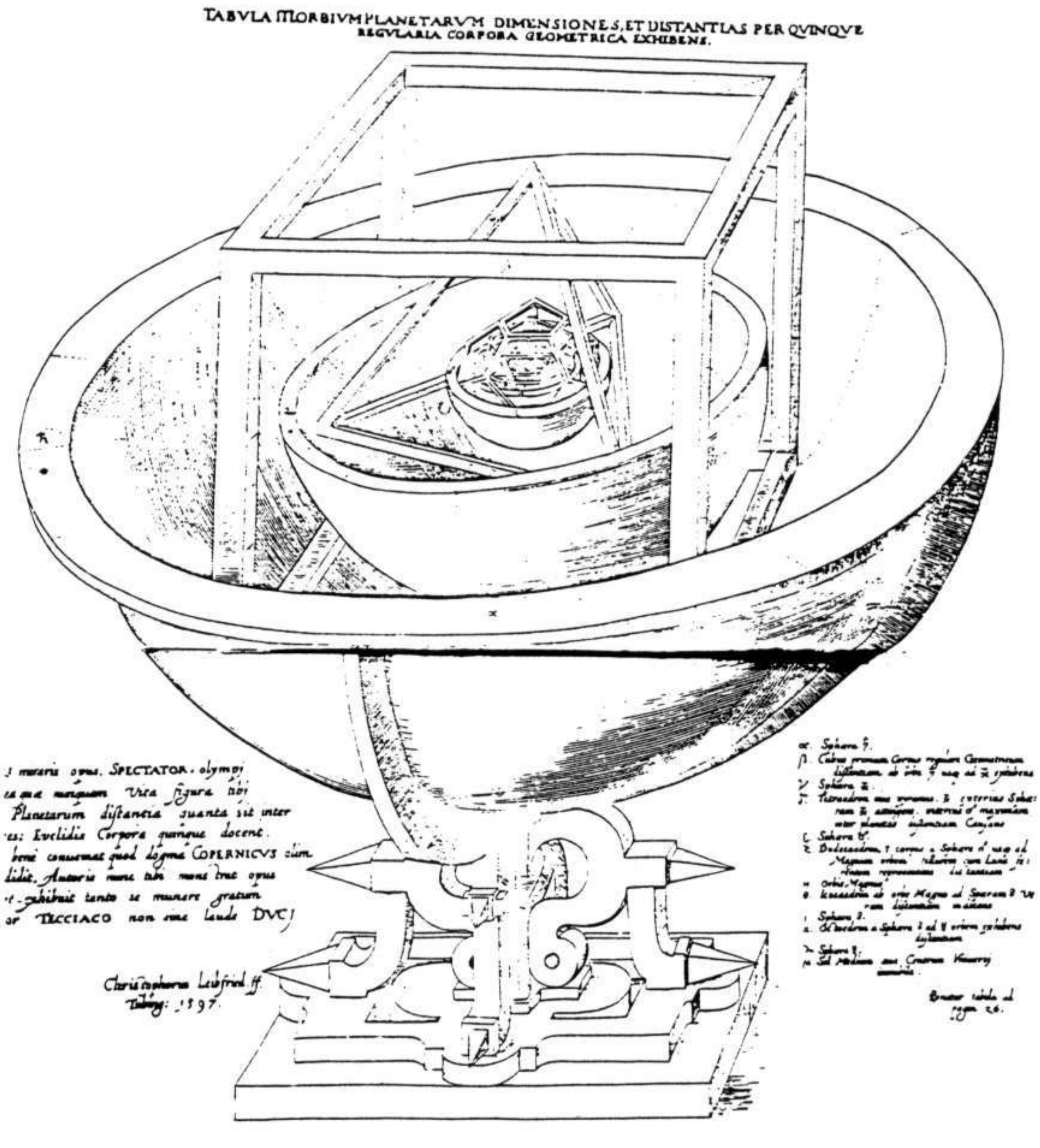
Timaeus maakt in zijn vertelling een scherp onderscheid tussen het ontstaan van het lichaam en het ontstaan van de ziel van de kosmos, en het is bij de wording van het lichaam dat de regelmatige figuren een hoofdrol spelen. Die korresponderen namelijk met de elementen waaruit de kosmos is opgebouwd, en Timaeus legt precies uit hoe het zit met de relatie tussen de wiskundige lichamen en de elementen. De wiskundige lichamen blijken niet de oorspronkelijke bouwstenen te zijn. Ze zijn zelf weer opgebouwd uit twee "oerdriehoeken", namelijk het *hemitrigon,* de rechthoekige driehoek waarvan de hypotenusa tweemaal zo lang is als de kortste zijde, en het *hemitetragon,* de gelijkbenige rechthoekige driehoek. Dat zijn de eigenlijke basisvormen, van waaruit de schepper alle materie in de kosmos heeft opgebouwd. De kosmos als permanente expositie van Ars et Mathesis - is dat geen aantrekkelijk beeld?



Figuur 2: de elementen danken hun vorm aan twee basisdriehoeken.

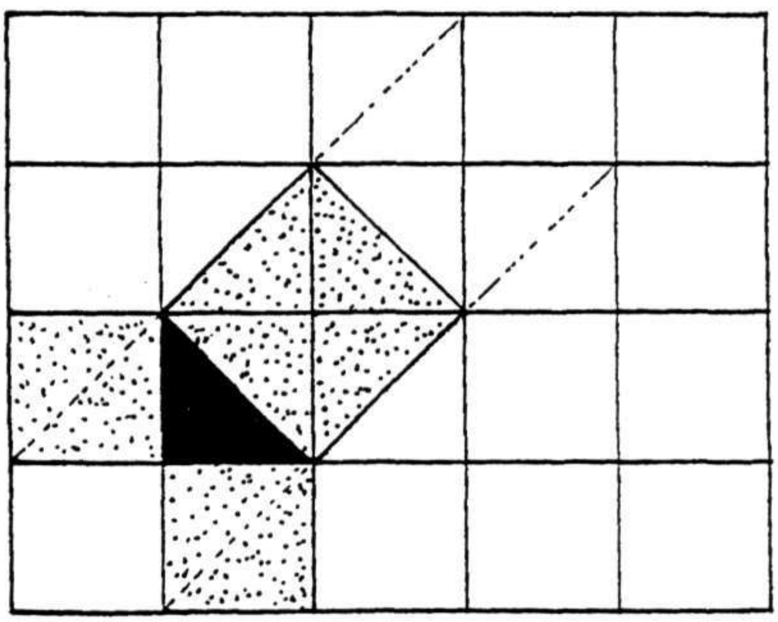
Tweeduizend jaar na Plato staarde de laatste astronoom van de Renaissance naar het hemelgewelf (aanvankelijk nog zonder teleskoop, want daarover zou hij pas later kunnen beschikken) en hij probeerde te begrijpen waarom de kosmos zo in elkaar zat als het geval was - met de zon, en niet de aarde, als stralend middelpunt. Johannes Kepler (1571-1630) was in Tübingen opgeleid als wiskundige èn als theoloog, en zijn scheppergod was niet meer de demiurg uit Plato's *Timaeus,* maar de christelijke Almachtige die het heelal niet alleen geschapen had, maar ook blijvend bestierde. Kepler kende de *Timaeus* net zo goed als de bijbel, en zijn eigenlijke interesse was om Plato's verhaal onder één noemer te brengen met het verhaal uit *Genesis.* Het stond daarbij voor hem vast dat de wetten van de meetkunde niet pas bij de schepping tot stand waren gekomen, maar een door God zelf opgelegd stramien hadden gevormd waarbinnen Hij het heelal had geordend. Om die ordening te doorzien, om dat patroon te doorgronden - dat was de levenstaak waarvoor Kepler zichzelf had gesteld; en dat hij in de loop van dat proces dan ook nog die drie bewegingswetten vond die de hedendaagse astronomen als zijn belangrijkste (of zelfs enige) verdienste zien, dat was eigenlijk maar bijzaak. Het is onze newtoniaanse geest die wil weten wat de wetten zijn waarmee de beweging van de planeten kan worden geformuleerd; Keplers pythagoreïsch-platonische geest vroeg naar de *vorm* van het heelal, naar de formele oorzaak van de hemelse sferen. Het verwerven van inzicht in die vorm was evenzeer een religieuze als een wetenschappelijke onderneming. Voor Kepler stond vast dat de kosmos het fysieke beeld van God was *(mundus est imago Dei corporea),* een zichtbare kopie van het goddelijke oerbeeld. De geometrie noemt Kepler het *archetype* van de kosmos; het is de vormentaal waardoor de mens, die immers door God geschapen is "naar Zijn beeld", in staat is om zijn schepper te leren kennen. Dat is dan ook het doel van de astronomie; en pas als we dat weten kunnen we de religieuze vervoering begrijpen waarmee Kepler verslag doet van zijn grote ontdekking in zijn eerste boek, het *Mysterium Cosmographicum.* Aan het eind van dat boek roept hij God aan en zegt: "Op zoek naar het spoor van Uw geest in de kosmos aanschouw ik het wonder van Uw almacht in het kunstwerk van het hemelgewelf; en ik zie, hoe Gij naar vijfvoudige norm de planetenbanen gesteld hebt, met de zon, die ons leven en licht schenkt, in het midden."

Naar vijfvoudige norm? Ja, inderdaad: in Keplers tijd waren Uranus, Neptunus en Pluto nog niet ontdekt, en waren er dus zes planeten waarvan de baan om de zon begrepen moest worden. Maar tussen zes planeten liggen vijf ruimten, en als echte Pythagoreër was Kepler niet zozeer geïnteresseerd in de afstand tussen die banen in kilometers, maar in het begrijpen van de onderlinge verhoudingen van die ruimten, dat wil zeggen van de sferen waarlangs de planeten zich bewegen. De grote ontdekking waarvan hij in *Mysterium Cosmographicum* verslag doet is, dat die vijf ruimten precies overeenkomen met de vijf platonische lichamen. Dat was niet zomaar een slag in de lucht; de berekende afstanden tussen ingeschreven en omgeschreven bollen van de elkaar omvattende platonische lichamen komen vrij aardig met de geobserveerde afstanden van de planetenbanen overeen. Figuur 3, een illustratie uit het *Mysterium Cosmographicum,* laat zien hoe Kepler zich die ordening precies voorstelde. We zien duidelijk dat de planetenbanen hier nog rond zijn, en nog niet elliptisch; het al wel gemeten verschil in afstand tot het vermeende middelpunt werd verklaard met behulp van de dikte van de schillen. Maar ook nadat Kepler had ontdekt dat de zon en de planeten zich niet verhouden als middelpunt en cirkel, maar als brandpunt en ellips, bleef hij aan zijn platonisch uitgangspunt vasthouden. In zijn latere hoofdwerk, de *Harmonices Mundi,* vinden we nog heel wat gedachten over de relaties tussen de platonische lichamen terug, inkiusief relaties die zo lichamelijk zijn dat het begrip *platonische liefde* een heel nieuwe dimensie krijgt!



Figuur 3: de verhoudingen van de planetenbanen volgens Kepler.

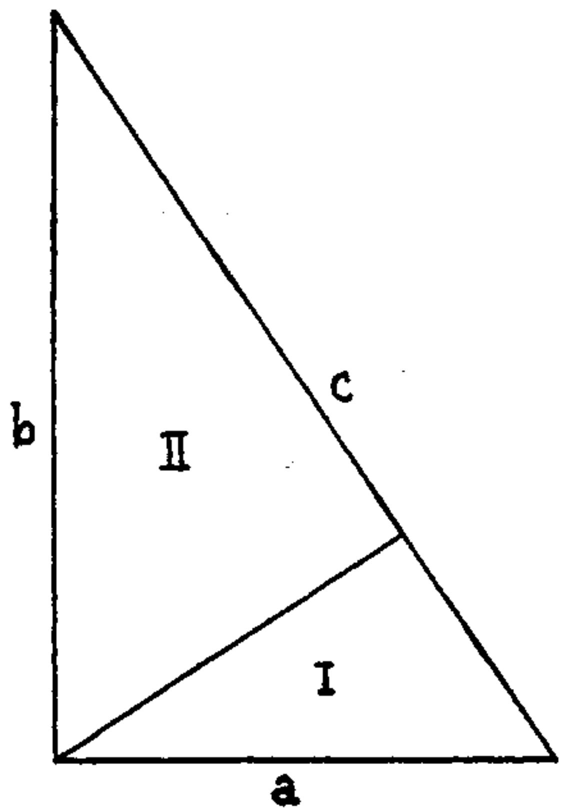
De stelling van Pythagoras is vrijwel in elke wiskundige toepassing terug te vinden. De timmerman gebruikt hem; de loodgieter gebruikt hem als hij een dakvormpje uit een plaat zink wil knippen..... maar ook in de formules die de relativiteitstheorie van Einstein beschrijven is de toepassing van de stelling van Pythagoras nog duidelijk zichtbaar.
Je hoeft hem maar eenmaal te bewijzen om van de geldigheid ervan overtuigd te zijn. Speelse geesten (en al zijn er mensen die er anders over denken) zoals wiskundigen nu eenmaal zijn, hebben er plezier in steeds nieuwe bewijzen voor de stelling te vinden. Daarop gaat dit artikel echter nu niet in.
Er is een ander probleem: Hoe is men voor het eerst op het idee van deze stelling gekomen?
We weten dat ten tijde van Pythagoras (ca. 550 v.Chr.) de stelling al lang bekend was; we vinden haar al terug op Babylonische kleitafeltjes.
Dikwijls wordt gesuggereerd of zelfs voor zeker aangenomen, dat de stelling gevonden werd als veralgemening van wat men op een tegelvloer die gelegd is van rechthoekig-gelijkbenige driehoeken (figuur 1) kan aflezen: de vierkanten die tegen de twee rechthoekszijden aanliggen bevatten samen evenveel driehoekjes als het vierkant dat tegen de schuine zijde ligt.



Oppervlakkig gezien een plausibele redenering, maar toch is deze voorstelling van zaken hoogst onwaarschijnlijk. Bovendien laat ze de belangrijkste aspecten van de ontdekking van de "stelling van Pythagoras" onaangeroerd.
Hoe zou men op het idee gekomen zijn dat hier iets te veralgemenen was?
Waarom zou men juist de eigenschap $a^2 + b^2 = c^2$ uit de vele interpretatiemogelijkheden van zo'n tegelvloer gekozen hebben? En dan het belangrijkste: gesteld dat men op een of andere manier de mogelijkheid van deze relatie zou hebben vermoed, hoe heeft men die dan bewezen?

In een boek van Dr. H.A. Naber: Van theorema naar sectie divina vond ik een andere voorstelling van zaken, die recht doet aan het vernuft en het inzicht van knappe koppen uit Mesopotamia... heel lang geleden en die tevens een verbluffend eenvoudig bewijs van de "stelling van Pythagoras" inhoudt.
Hier volgt mijn omschrijving van Naber's mededeling.

- We stellen, dat bekend is, dat de oppervlakte van gelijkvormige figuren evenredig is met het kwadraat van een der zijden.
- In een rechthoekige driehoek, waarin een hoogtelijn op de schuine zijde is getrokken (figuur 2) kunnen we drie gelijkvormige driehoeken onderscheiden: De beide driehoeken waarin de hoogtelijn de grote driehoek verdeelt en de grote driehoek zelf(ze hebben immers alle drie gelijke hoeken).
- a,b en c zijn overeenkomstige (schuine) zijden van deze driehoeken.



En omdat de oppervlakken van deze driehoeken evenredig zijn met de kwadraten van deze zijden mogen we noteren Opp I = ka^2 , Opp II = kb^2 en Opp III (de grote driehoek) = kc^2. Omdat uit de figuur blijkt dat Opp I + Opp II = Opp III is $ka^2 + kb^2 = kc^2$ en dat is onze bekende stelling van Pythagoras.
Het uitschrijven van het bewijs verduistert eigenlijk een beetje de eenvoud ervan en ook het feit, dat we hier als het ware ZIEN dat, en waarom, $a^2+b^2=c^2$ een heel voor de hand liggende (neem dit niet te letterlijk, want er is wel degelijk een diep inzicht in de structuur van de figuur voor nodig) eigenschap van elke rechthoekige driehoek is.

In de bouwkunde en de techniek is het soms handig om ellipsen en spiralen te benaderen met behulp van cirkelbogen. De opeenvolgende cirkelbogen moeten dan delen zijn van elkaar rakende cirkels, anders is de aansluiting niet vloeiend.

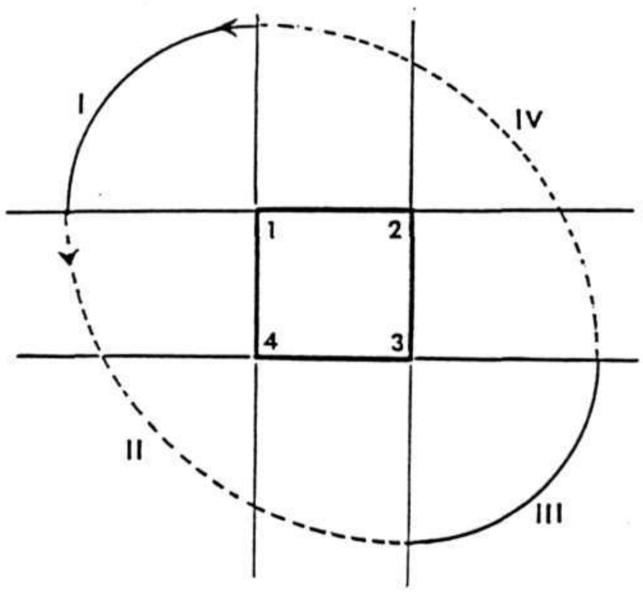


fig. 1.

Figuur 1 geeft een voorbeeld van zo'n "ellips"-constructie.Deze ellips wordt opgebouwd uit vier cirkelbogen en het constructievoorschrift is als volgt:

A. Teken een vierkant met de hoekpunten 1 t/m 4.

B. Zet de passerpunt in 1 en maak cirkelboog I.

C. Passerpunt in 2 geeft cirkelboog II (gestippeld).

D. Passerpunt in 3 geeft boog III.

E. Passerpunt in 4 geeft boog IV (gestippeld).

Merk op dat we de boog steeds linksdraaiend tekenen en dat de verplaatsing van de passerpunt rechtsdraaiend is.

Nemen we de straal van de eerste cirkel groter, dan ontstaat een grotere "ellips", die overal even ver van de reeds getekende ligt.

De oppervlakte van een echte ellips is eenvoudig te berekenen. Als de halve korte as a is en de halve lange as b, dan is die oppervlakte $\frac{a}{b}\pi b^2$ ofwel πab. Maar het berekenen van de omtrek van een echte ellips is een moeilijk wiskundig probleem.

De omtrek en oppervlakte van onze pseudo-ellips zijn echter bijzonder gemakkelijk te berekenen. De lengte ervan is de som van vier cirkelbogen en de oppervlakte is gelijk aan de som van vier kwart cirkels min de oppervlakte van het vierkant.

Probeer de constructie ook eens met een ruit als uitgangspunt. Er ontstaat nu ook een ellips.

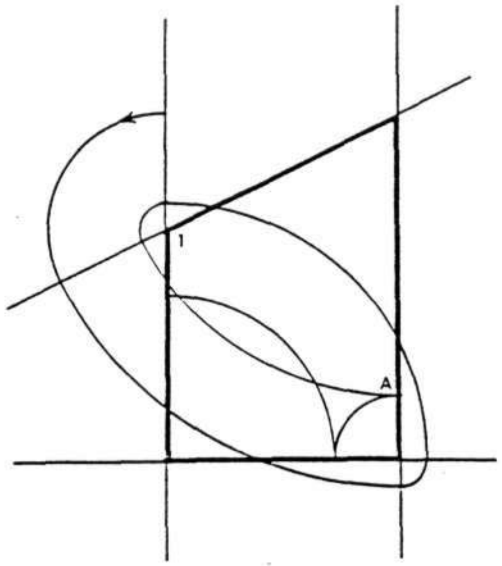


fig. 2

Andere uitgangsfiguren.

Als we het constructievoorschrift toepassen op een willekeurige vierhoek ontstaat een kwasi-spiraal. In figuur 2 is uitgegaan van een trapezium. De eerste zes cirkelbogen zorgen voor een keurig naar binnen spiraliserende figuur. Bij verdere voortzetting van de constructie gebeurt iets eigenaardigs: het eindpunt van de zesde boog komt op een van de zijden van het trapezium (bij A). Omdat we dan door moeten gaan met linksdraaiende bogen, ontstaat een scherpe punt. En dit blijft zich herhalen: we kunnen het trapezium niet meer uit.

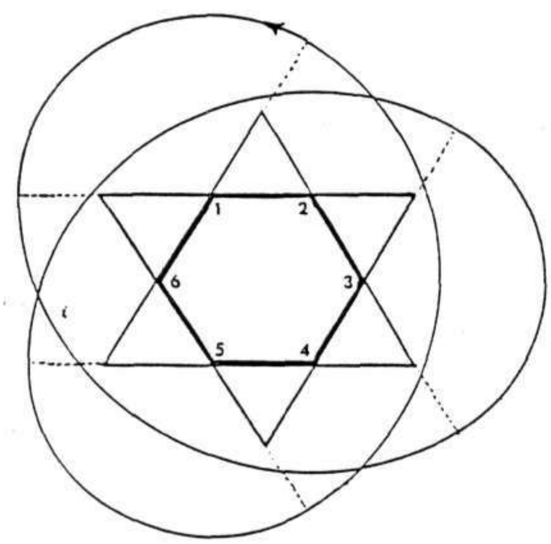


fig. 3

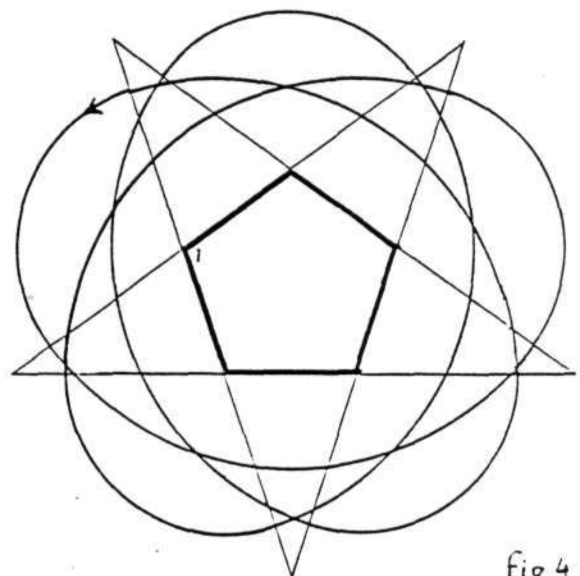


fig. 4

Het is interessant om als uitgangspunt van de constructie allerlei veelhoeken te nemen; regelmatige en onregelmatige en dan het gedrag van de kromme die ontstaat te volgen.
Twee bijzondere gevallen zijn uitgewerkt in figuur 3 en 4.

Een regelmatige zeshoek (figuur 3) geeft een kromme die mooi sluit als we alle zes hoekpunten als middelpunten van cirkels gebruikt hebben. Bij een regelmatige vijfhoek (figuur 4) is het wat ingewikkelder. Na gebruik van alle vijf de hoekpunten is de kromme nog niet gesloten, dus gaan we weer door vanaf het beginpunt. Na nog eens alle hoekpunten doorlopen te hebben is de kromme gesloten.

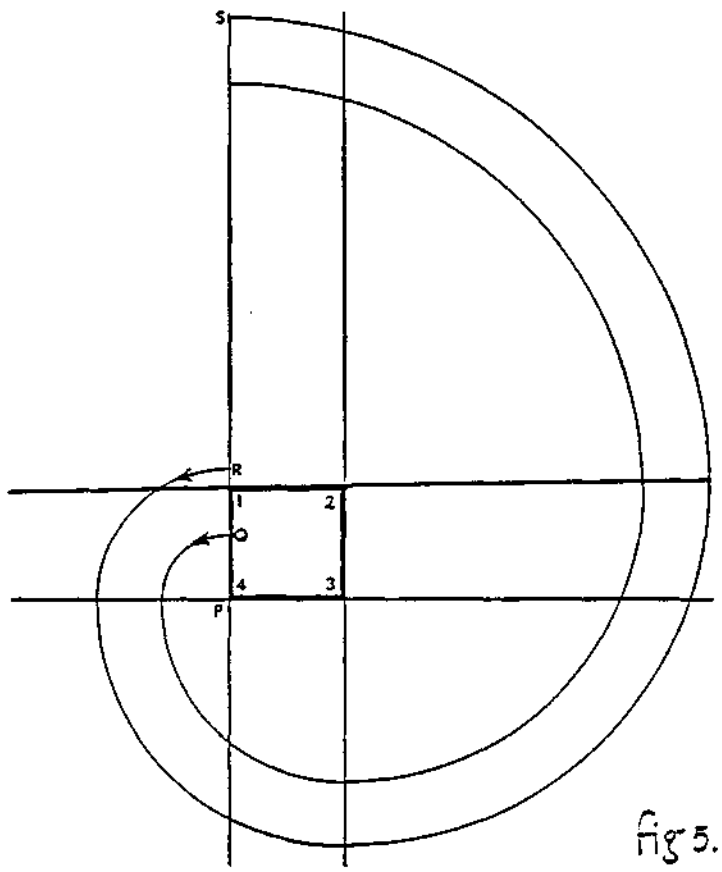


fig 5.

Een ander constructievoorschrift.

In figuur 5 beginnen we weer met een vierkant. Het constructievoorschrift luidt nu:

A. Passerpunt in 4; trek een kwartcirkel met de straal PR.

B. Passerpunt in 3, trek een kwart cirkel.

C. Passerpunt in 2.... en zo voort.

Er ontstaat een quasi-spiraal opgebouwd uit kwart cirkels. In figuur 5 is nog een tweede "spiraal" getekend, die begint met een iets kleinere cirkel (straal PQ). Vanzelfsprekend lopen beide krommen evenwijdig aan elkaar.

Met dit constructievoorschrift (dat ook op vele andere uitgangsfiguren kan worden toegepast) wordt het vierkant als het ware afgewikkeld. Het vierkant kunnen we ons voorstellen als een vierkante paal

waaromheen een touw is gewonden. Aan het losse einde maken we een potlood vast. Als we nu met het potlood over de grond gaan en tegelijkertijd het touw strak houden ontstaat dezelfde figuur.
Een van de echte spiralen (de spiraal van Archimedes) kan op dezelfde manier getekend worden. Het touw wordt dan niet om een vierkant gewonden maar om een cirkel, bijvoorbeeld een balpen of een garenklosje.
Een eigenschap van de Archimedische spiraal is, dat de windingen evenwijdig lopen. De quasi-spiraal uit figuur 5 heeft deze eigenschap ook. Voor beide soorten spiralen is dat gemakkelijk aan te tonen. Het touw wordt namelijk na elke omloop langer en wel precies zoveel als de omtrek van de uitgangsfiguur. In figuur 5 is RS bijvoorbeeld vier maal zo lang als de zijde van het vierkant.

De eenvoudigste quasi-spiraal

Wie zoekt naar een bijzonder eenvoudige spiraalbenadering kan deze ook uit halve cirkels samenstellen. Figuur 6 laat zien hoe dat gaat.

We beginnen met het lijnstuk AB. Zet de passerpunt in A en trek de eerste

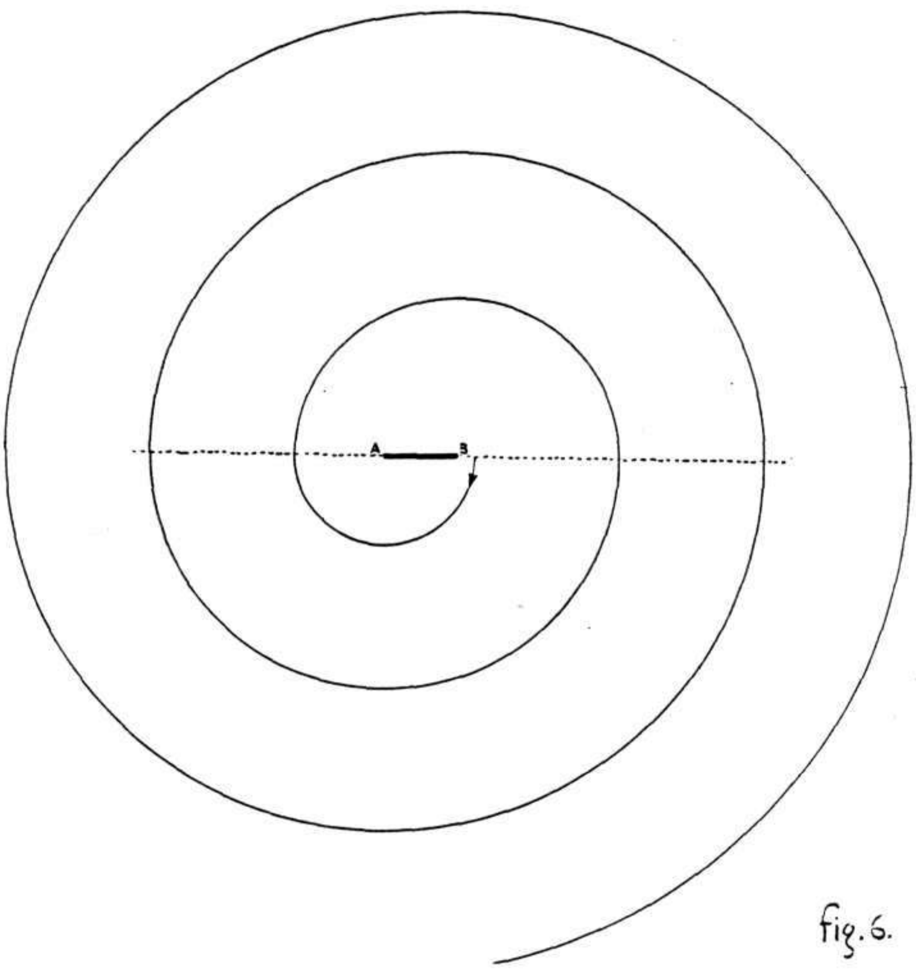


fig. 6.

halve cirkel. Daarna de passerpunt in B en trek de tweede halve cirkel. Dan weer de passerpunt in A en zo voort. We krijgen weer een quasi-spiraal die lijkt op de spiraal van Archimedes.