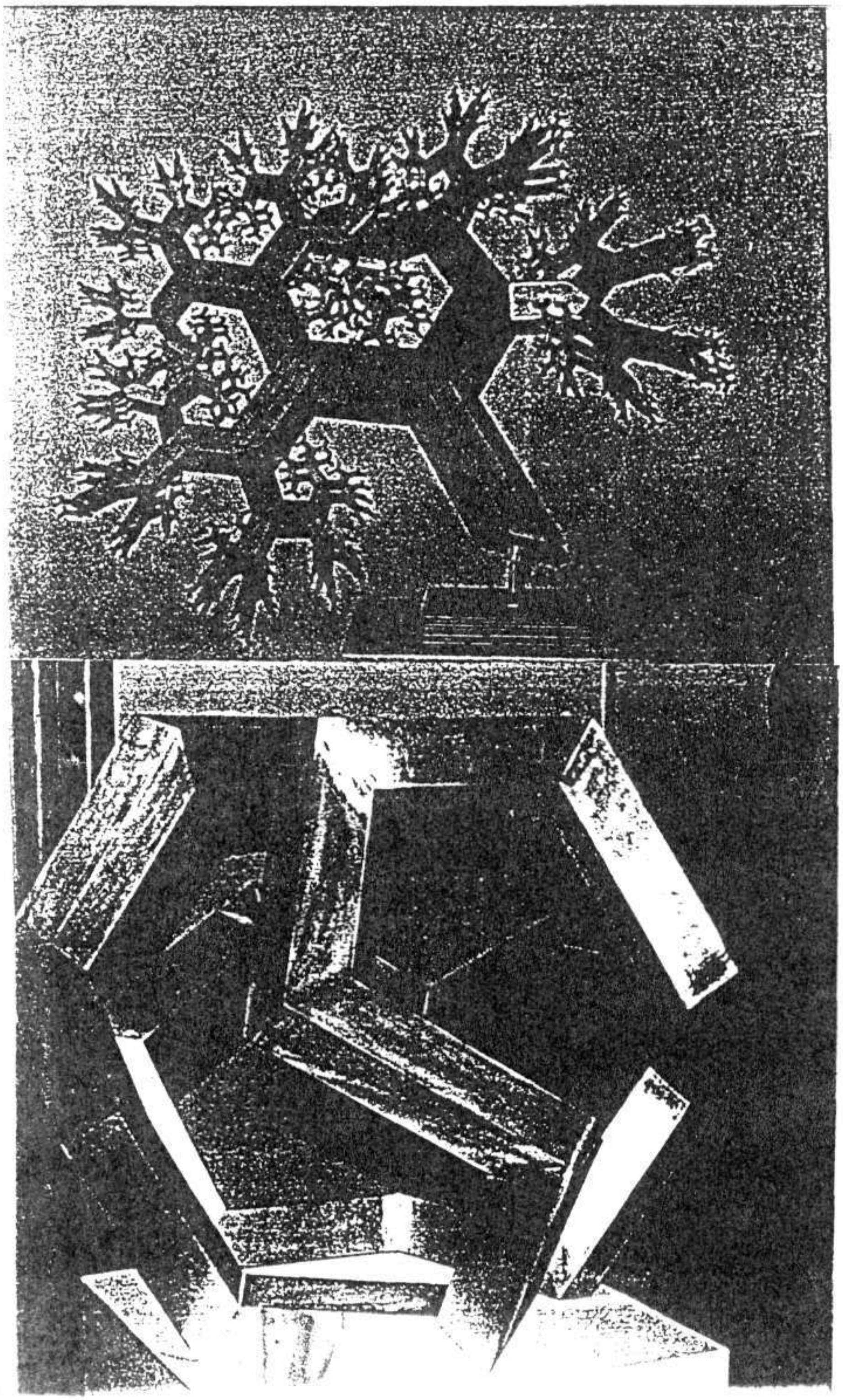
Arthesis

Mededelingenblad
van de Stichting
Ars et Mathesis

redaktieadres
Nieuwstraat 6
3743 BLBaarn

Jaargang 7
Nummer 1
Februari 1993



De tentoonstelling Ruimte en Reliëf in Kasteel Groeneveld te Baarn, waar Popke Bakker, Koos Verhoeff en Herman Lieve hun prachtige ruimtelijke objecten en reliëfs lieten bewonderen, ligt al weer achter ons.

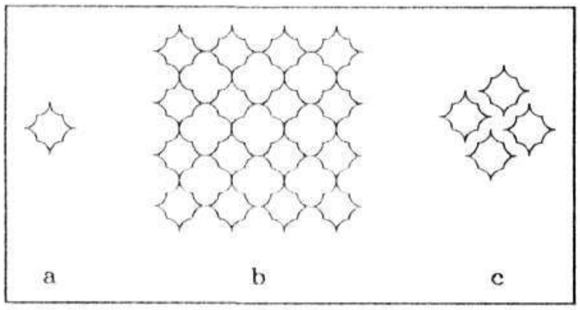
Zowel bij de opening op 24 als op 31 oktober was er grote belangstelling. De tentoonstelling werd goed bezocht en de aanwezigheid van de kunstenaars op de zaterdagen werd zéér gewaardeerd.

Bijgaand enkele van de karakteristieke objecten. Een groot gedeelte van de tentoonstelling is alsnog te bezichtigen in "Het kantoor-van de toekomst" in 's Hertogenbosch, voor diegenen die wat gemist hebben of de kennismaking willen hernieuwen.

LIJN-EN-SPEL (II)

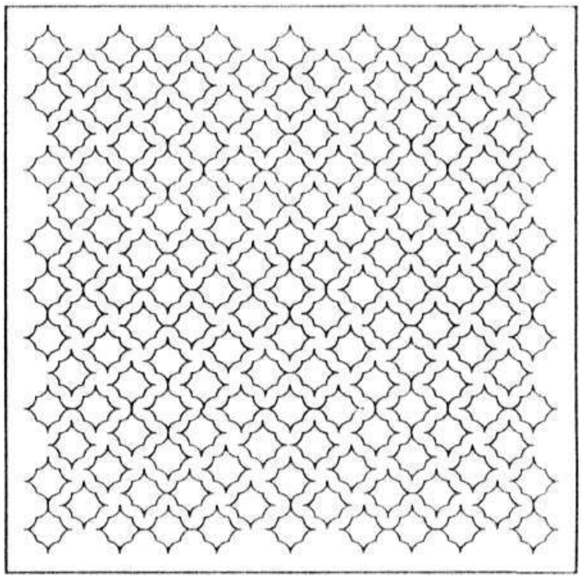
Zef Damen

Een simpel lijnenfiguurtje kan, door het te herhalen, worden omgetoverd in verrassende kunststukjes. De manier waarop die herhalingen plaatsvinden, is bepalend voor hoe het hele patroon eruit gaat zien; een kleine wijziging hierin heeft meestal grote gevolgen. Op ruitjespapier (vierkantjes!) is "één stap naar rechts" en "één stap naar beneden" erg voor de hand liggend. Het patroon dat ontstaat heeft een *vierkant rooster,* en dat maakt het meestal wat "streng" en eentonig (zie bijvoorbeeld de figuren 2, 5 en 6c in Lijn-en-Spel I). Veel spannender is het, het basisfiguurtje min of meer zelf te laten bepalen, hoe het herhaald moet worden. Neem bijvoorbeeld een eenvoudig figuurtje (7a). Herhaling volgens een vierkant rooster levert figuur 7b op.



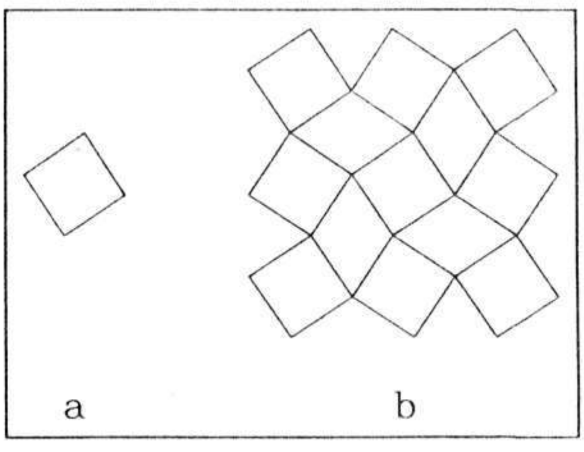
7. herhaling

Afgezien van het tevoorschijn komen van een tweede concurrerende figuurtje (een soort klavertje-vier), is het nieuwe patroon tamelijk saai te noemen. Figuur 7c geeft een speelsere manier van herhalen. Vrijelijk hierop voortbordurend ontstaat een intrigerend patroon (8).



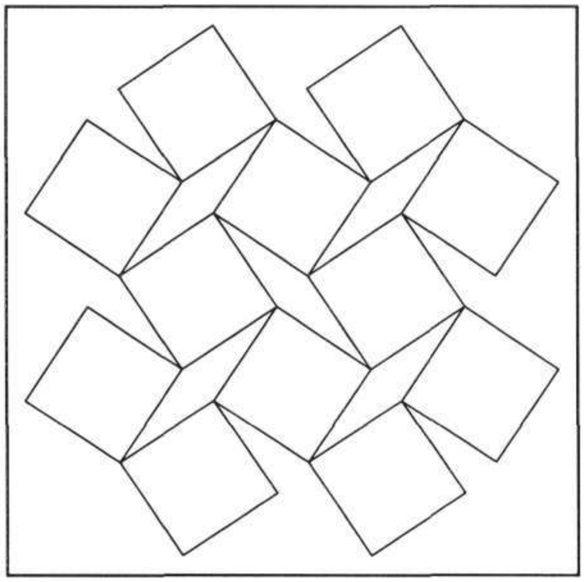
8. matje

Bij nadere beschouwing heeft figuur 8 geen regelmatig rooster (in strikte zin). We kunnen de manier van herhalen zichtbaar maken, door de middelpunten van de basisfiguurtjes met elkaar te verbinden; de herhaling wordt dan zelf een (basis)patroon. Het herhalingspatroon van 7c is weergegeven in 9a, dat van 8 in 9b (hier zitten echter negen "sterretjes" in één vierkantje). We kunnen nu rechtstreeks de manier van herhalen proberen te beïnvloeden, door het herhalingspatroon te veranderen. Door bijvoorbeeld de vierkantjes anders te rangschikken, ontstaat figuur 10. Dit "terugvertalend" naar de oorspronkelijke sterretjes, krijgen we figuur 11.

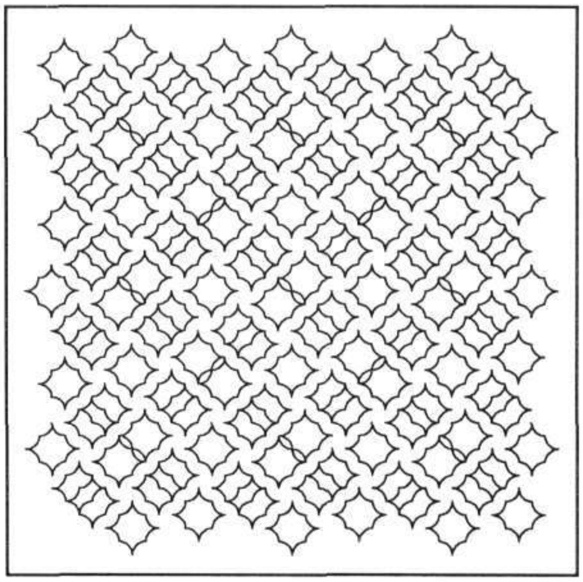


9. herhalingspatroon

Vergeleken met 8 "doet dit het niet" naar mijn gevoel!

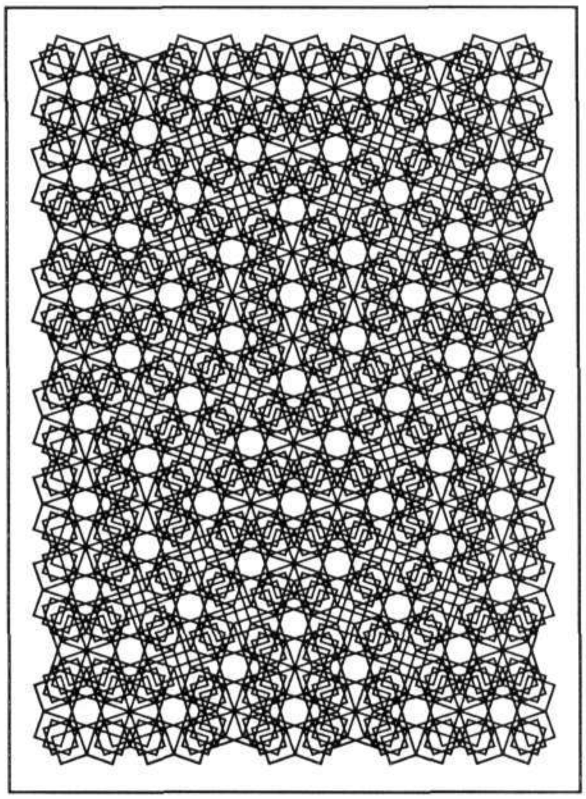


10. ander herhalingspatroon

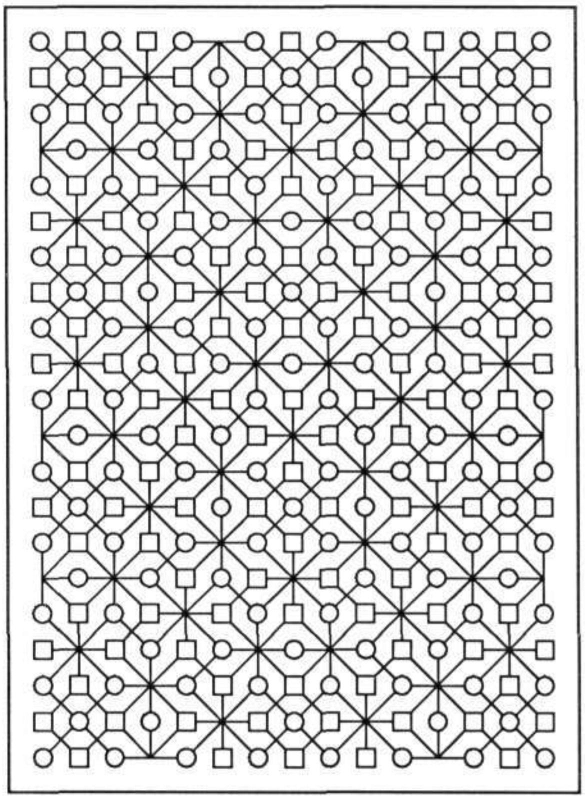


11. "doet het niet!"

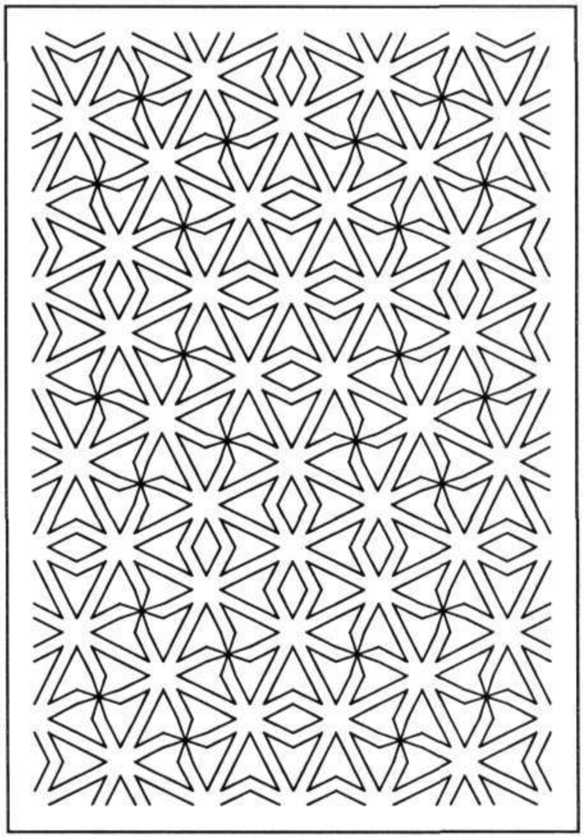
Het blijkt, dat naarmate het grondpatroontje beter in staat is de "ruiten" tussen de vierkanten op te vullen, er een mooier totaalpatroon ontstaat. Hier zijn nog een paar voorbeelden (12, 13, 14, 15).



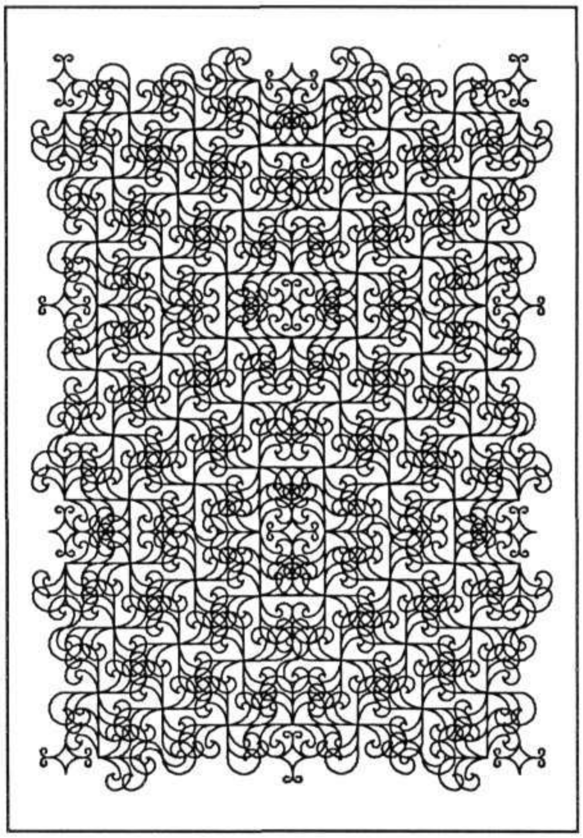
12. gekooid



13. halters

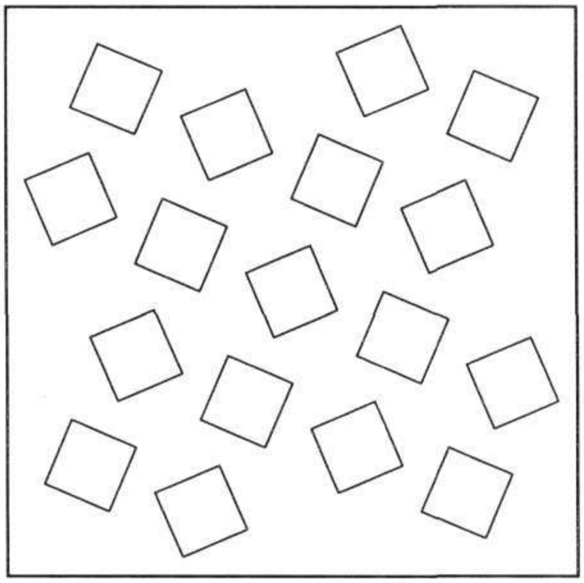


14. masker

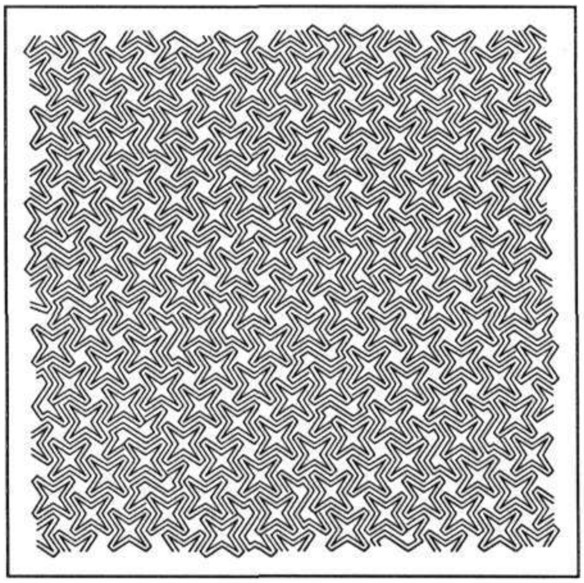


15. baron

Hiermee is het aantal mogelijke herhalingpatronen uiteraard bij lange na niet uitgeput. Eigenlijk is de variatie daarin net zo groot als in de oorspronkelijke figuren. Hier volgt nog een voorbeeld (16, 17).

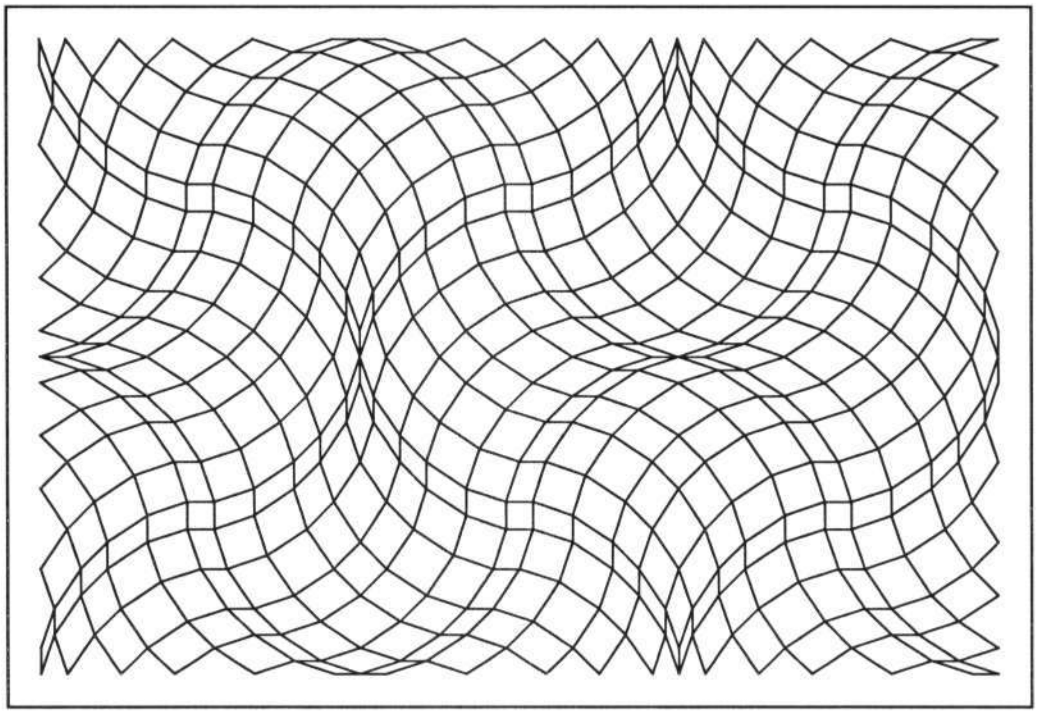


16. nog een herhalingspatroon

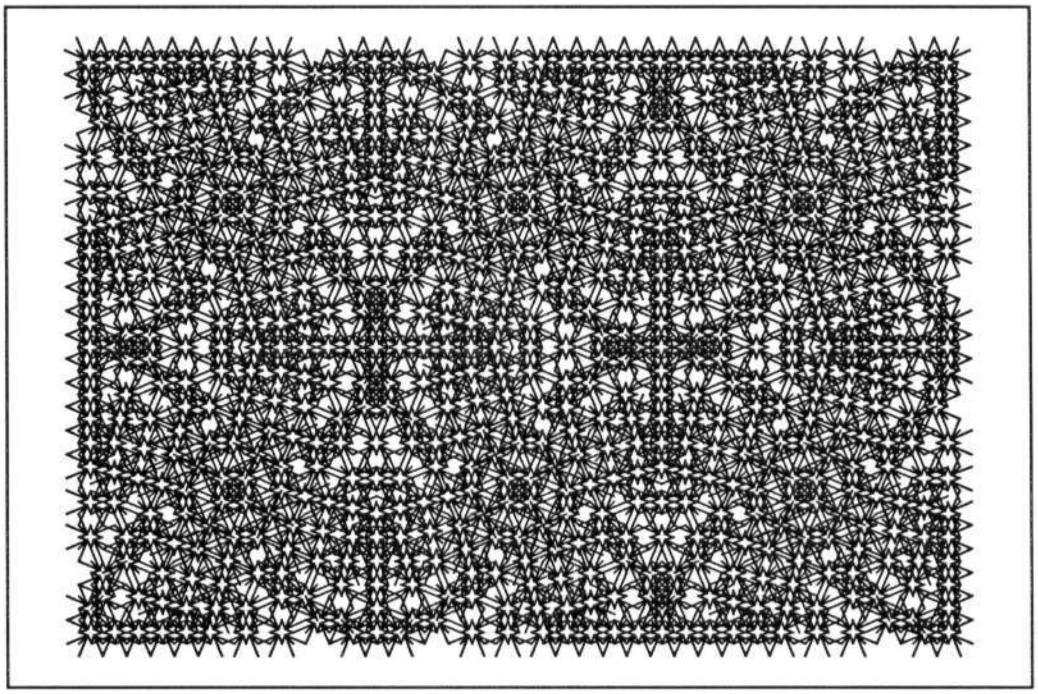


17. 4-ster

Als je met herhalingspatronen net zoveel kanten op kunt als met "gewone" figuren, waarom dan niet de zaak omgedraaid? Eerst een herhalingsfiguur ontwerpen, die er aantrekkelijk uitziet, en dan zoeken naar een passend basispatroon. Het laatste voorbeeld is op die manier ontstaan (18, 19).



18. golven



19. kluwen

HET PENTAGRAM, DE GULDEN SNEDE en .... de Fibonacci-getallen.

de Rijk.

De regelmatige vijfpuntige ster (het pentagram) is een fraaie en (wiskundig gezien) een bijzonder interessante figuur. Het is dan ook begrijpelijk, dat het pentagram in de loop der eeuwen door allerlei geheime en minder geheime groeperingen geannexeerd werd tot symbool van wijsheid, toverkracht en wat dies meer zij. Wij zullen ons alleen met de wiskundige kant bezig houden.

Het pentagram.

In figuur 1 liggen de punten van de ster op een cirkel. Het is gemakkelijk te berekenen, dat de hoeken die de punten vormen gelijk zijn aan 36°.
In het centrum zien we een regelmatige vijfhoek en als we de opeenvolgende punten van de ster met elkaar verbinden (hier gestippeld) ontstaat ook een regelmatige vijfhoek.

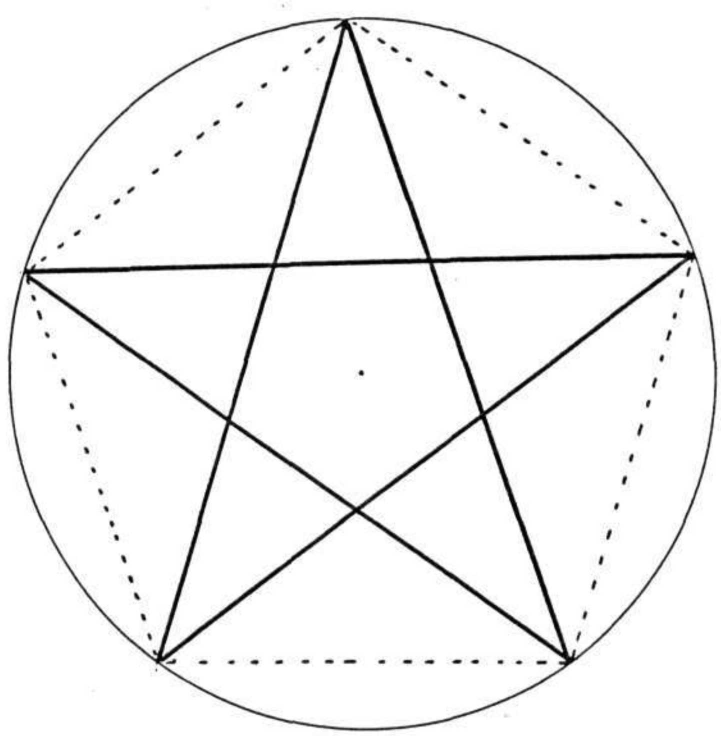


Fig. 1.

We halen het bovenste deel van de figuur naar voren (figuur 2). Deze figuur is op zichzelf al vol verrassingen. Ze bestaat uit een aantal ineengevlochten gelijkbenige driehoeken, waarin hoeken van 36°, 72° en 108° voorkomen, hetgeen gemakkelijk uit figuur 1 is af te leiden.
We zullen aantonen, dat in deze figuur de zogenaamde gulden snede voorkomt en dat deze verhouding dezelfde is als we bij de rij van Fibonacci tegenkwamen in een vorig stukje.

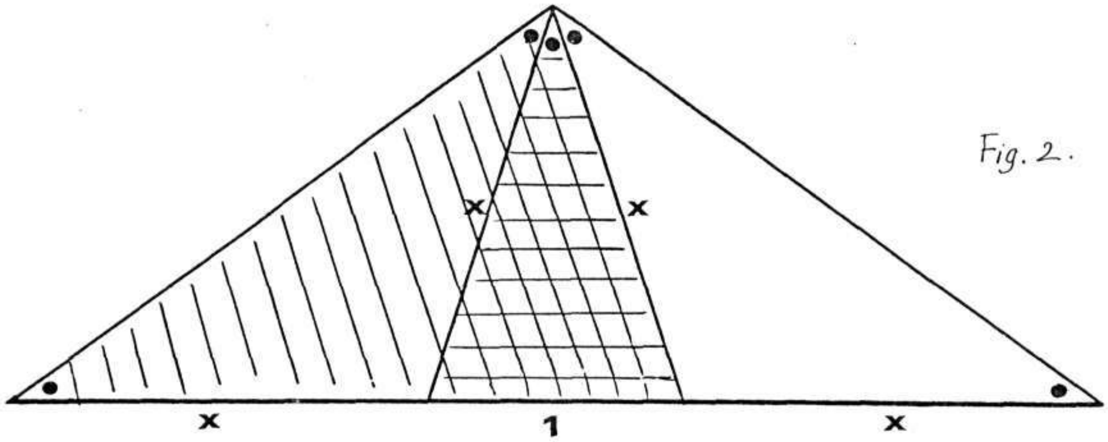


Fig. 2.

Daarvoor stellen we de basis van de middelste gelijkbenige driehoek op 1 en de verlengden links en rechts op x. Verder merken we op, dat de gearceerde driehoeken (de kleine is staand en de grote liggend) gelijkvormig zijn.
We mogen dan schrijven:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \quad \text{ofwel} \quad x^2 = x+1, \text{ dus } x^2 - x - 1 = 0$$

We berekenen hieruit (zelf doen!) dat de twee waarden van x die hieraan voldoen gelijk zijn aan: $x_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1{,}6180339....$ en

$$x_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -0{,}6180339....$$

De eerste waarde is ...... de Fibonacci-verhouding! (Met de tweede, negatieve, waarde bemoeien we ons hier niet).
Deze Fibonacci-verhouding komt vele malen - niet alleen in de verdeling van de diagonalen van de ster - in het pentagram terug.

De gulden snede.

Onder de gulden snede verstaan we het verdelen van een lijnstuk in twee delen, zodanig dat de verhouding van het hele lijnstuk tot het grootste deel dezelfde is als die van het grootste deel tot het kleinste. In figuur 3 is AB dat lijnstuk en in punt C is de gulden snede aangebracht. Dat wil hier dus zeggen: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$

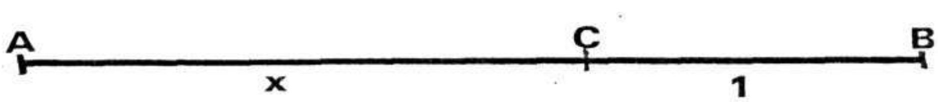
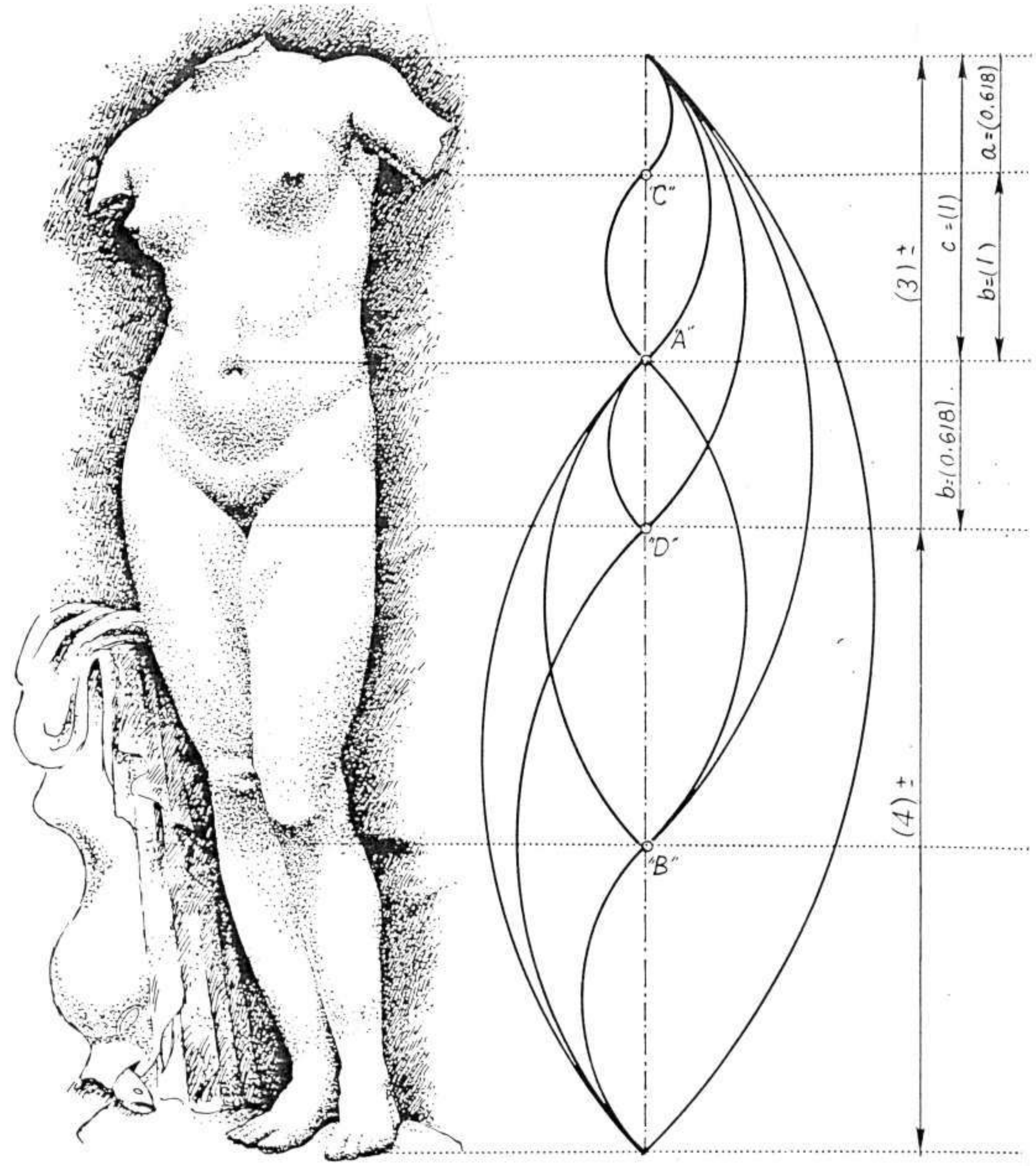


Fig. 3.

Deze verdeling van een lijnstuk vinden we al bij Euclides (ca 300 v.C.) in hoofdstuk 2 van zijn "Elementen". Maar de kennis ervan moet veel ouder zijn. Waarschijnlijk kende Pythagoras (ca 550 v.C.) deze verdeling al. De term: Gulden Snede is pas veel later gebruikt: door Kepler, de grote wiskundige en astronoom rond 1500. En in diezelfde tijd werd een nog glorieuzer naam ingevoerd door Luca Pacioli waarvan in 1509 een boek verscheen met de titel Divina Proportione; de Goddelijke Verhouding dus! Deze namen ontstonden toen men meende dat



De Aphrodite van Cyrene. Overal gulden snede-verhoudingen?

deze verhouding in talloze antieke gebouwen en beelden, maar vooral ook in de natuur terug te vinden was.

Hoe groot is deze verhouding? Daar hoeven we niet lang naar te zoeken. Als we die aan de hand van figuur 3 willen uitrekenen, dan krijgen we:

$$\frac{\text{hele zijde}}{\text{grootste deel}} = \frac{\text{grootste deel}}{\text{kleinste deel}} \quad \text{ofwel:} \quad \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \ ,$$

maar dit hebben we zojuist uitgerekend met behulp van figuur 2.

De gulden snede-verhouding is dus : $\dfrac{1{,}618...}{1} = 1{,}618.......$

De gulden snede-verhouding is dus ...... het verhoudingsgetal van Fibonacci!

De constructie van de gulden snede-verhouding.

Het is niet moeilijk deze verhouding te construeren. Hier volgen twee manieren. Construeer een vierkant ABCD(figuur 4). Daarna een cirkel met het midden van AB als middelpunt M en met MC als straal. Omdat de gestippelde driehoek rechthoekig is mogen we schrijven:

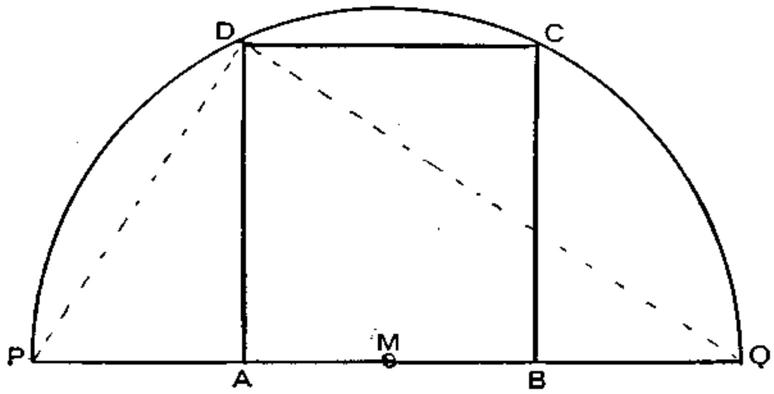


Fig. 4.

$$DA^2 = PA \times AQ \text{ ofwel } AB^2 = PA\ (PA+AB), \text{dus : } \frac{PA+AB}{AB} = \frac{AB}{PA}$$

Dus PB is in de gulden snede-verhouding verdeeld door A.

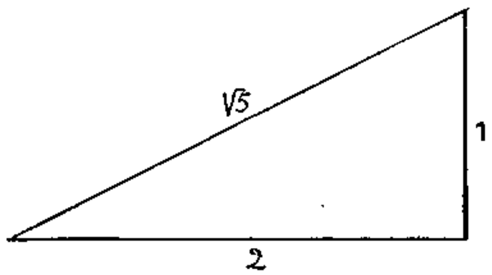


Fig. 5

We kunnen een nog eenvoudiger constructie halen uit het feit, dat het verhoudingsgetal dat we zoeken gelijk is aan 1/2(1+V5). We construeren daarvoor een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1 en 2; dan wordt de schuine zijde gelijk aan V5. Met behulp van deze driehoek kan me de gevraagde 1/2(1+V5) opbouwen. (Figuur 5)

Nu zal ook wel duidelijk zijn hoe we hoeken van 36° kunnen construeren en daaruit volgend ook: het pentagram.

Nieuwe dingen met de gulden snede.

Er zijn nog talloze merkwaardigheden te vermelden over de gulden snede, die al vele eeuwen bekend zijn. Het volgende is een vrij recente vondst gedaan door de Engelse natuurkundige Roger Penrose in de jaren zeventig.

Klappen we figuur 2 om de lange zijde en laten we enige lijnen weg (figuur 6), dan ontstaat een ruit die opgedeeld is in een figuur met de vorm van een vlieger en met de vorm van een pijl.

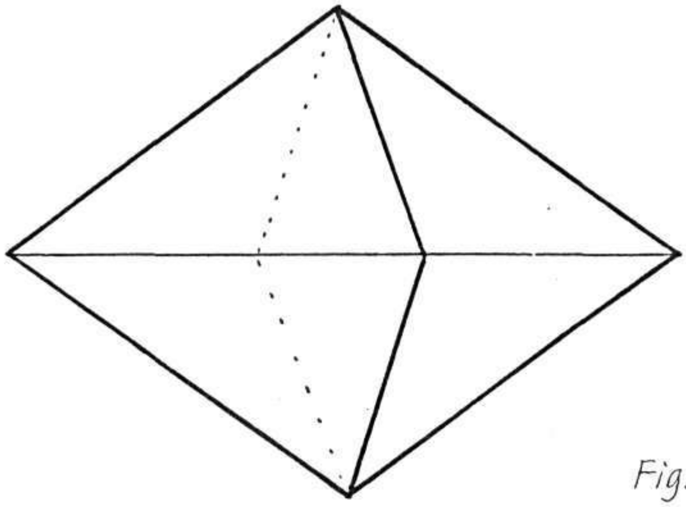


Fig. 6.

Knippen we nu een groot aantal van deze vliegers en pijltjes uit dun karton, dan blijkt dat we daarvan een legpuzzel kunnen maken die het vlak tot in het oneindige naadloos kan vullen. (Figuur 7). Maar het merkwaardige is, dat het patroon dat zo ontstaat geen enkele regelmaat vertoont en zelfs niet kan vertonen. Dit in tegenstelling tot de regelmatige vlakvullingen die Escher zo na aan het hart lagen.

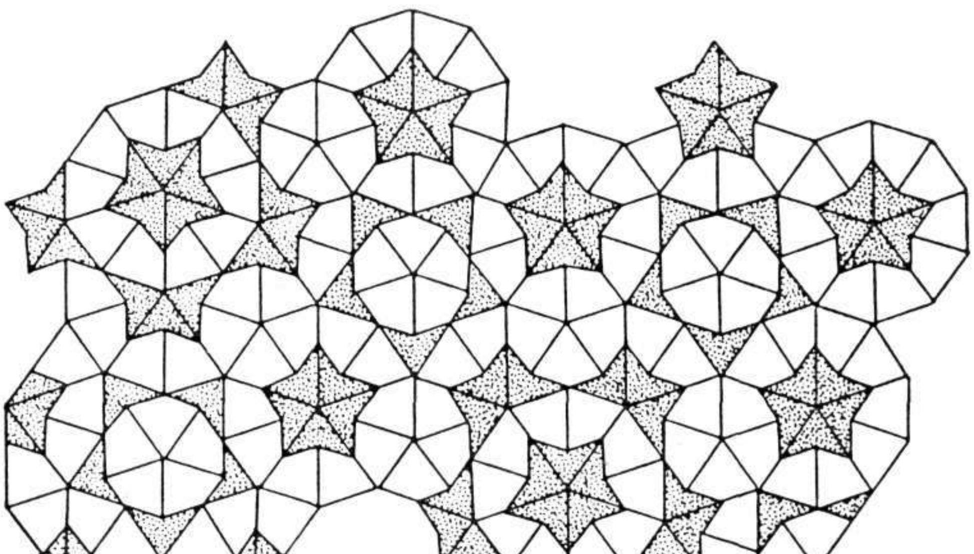


Fig. 7

Wie wat meer wil lezen over de gulden snede kan het beste een niet al te oud boek raadplegen zoals: The Divine Proportion van H.E.Huntley, dat in 1970 door Dover Publications, New York is uitgebracht.