Arthesis

Mededelingenblad
van de Stichting
Ars et Mathesis

Redaktieadres
Nieuwstraat 6
3743 BL Baarn

Jaargang 6
Nummer 3
September 1992

Ars et Mathesis-dag 1992
In Kasteel Groeneveld te Baarn
Opening van de tentoonstelling
Wiskunstige Schoonheid
24 Oktober 12.00 u. in de Hasselaar-zaal.

Op zaterdag 24 oktober wordt de tentoonstelling WISKUNSTIGE SCHOONHEID geopend in het Kasteel Groeneveld te Baarn.
Deze tentoonstelling laat werken zien van:
Popke Bakker, Koos Verhoeff en Herman Lieve
Ruimtelijke sculpturen van Verhoeff en Bakker en houtreliëfs van Lieve.

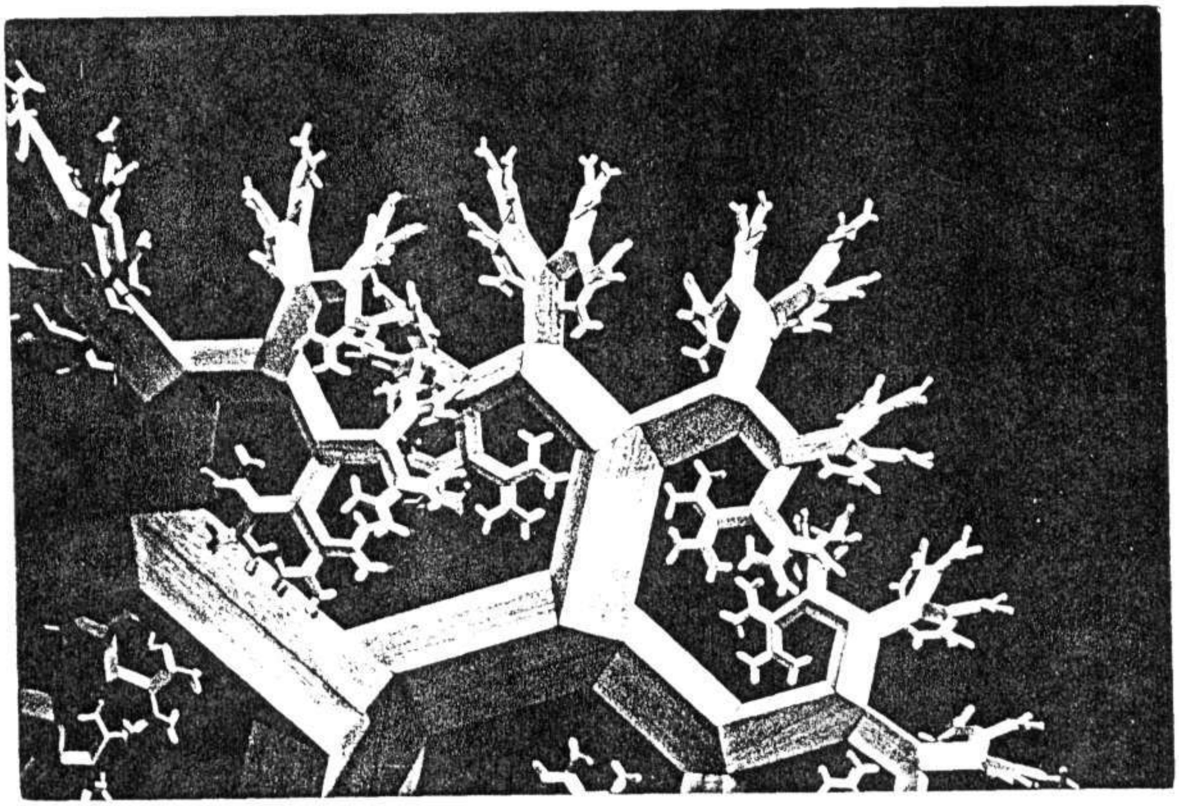
Programma

12.00 u. Opening in de Hasselaarzaal voor genodigden en Ars et Mathesis belangstellenden.
13.00 u. Lunchpauze
14.00 u. Lezingen in de Hasselaarzaal voor belangstellenden van Ars et Mathesis.
15.00 u. Gelegenheid om de onderlinge contacten te onderhouden.

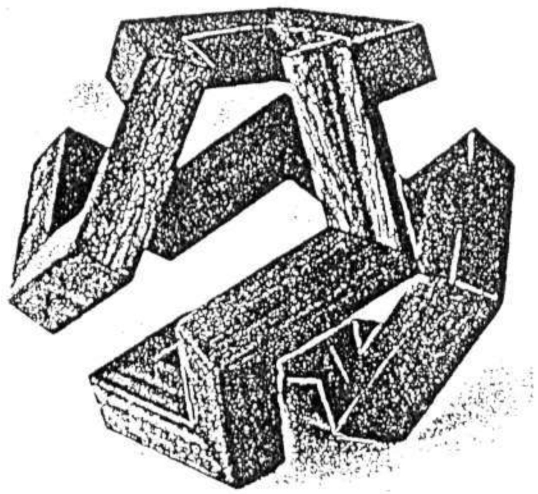
U bent van harte welkom op zaterdag 24 oktober.
Gedurende de tentoonstellingsperiode zullen de kunstenaars elke zaterdag van 14.00 tot 15.00 aanwezig zijn om demonstratie en uitleg over hun werk te geven.

Over RUIMTELIJK VERSTEK op de tentoonstelling
WISKUNSTIGE SCHOONHEID

De rechthoekige lijst als begrenzing van een schilderij, een prent of een spiegel is een zeer alledaags object. Ook ramen en deurposten zijn dikwijls "ingelijst".
Telt U voor de aardigheid eens hoeveel lijsten er in Uw huis zijn.
Wie zelf al eens een lijst gemaakt heeft, zal gemerkt hebben, dat de zaaghoek zuiver loodrecht op het lijstprofiel moet staan en dat bovendien nauwkeurig een hoek van 45° met de lengteas moet maken. Zo niet... dan wordt het in de hoeken een rommeltje.
In 1978 ontdekte Popke Bakker, dat juist deze foute zaagsneden de richting wezen naar wondermooie ruimtelijke vormen, soms lijkend op bekende wiskundige lichamen en soms tot geheel nieuwe vormen.
In 1984 maakte hij kennis met Prof. Koos Verhoeff die gefascineerd werd door de nieuwe mogelijkheden en zelf ook dit vrijwel braakliggend terrein ging verkennen.



Hierboven ziet U een van de prachtige creaties van Prof. Verhoeff: de ruimtelijke versie van de Boom van Pythagoras, geheel opgebouwd in ruimtelijk verstek.
De regelmatige bezoekers van de Ars et Mathesisdagen hebben al meerdere malen kennis gemaakt met wat kleiner werk van Bakker en Verhoeff, Maar wat op deze tentoonstelling te zien is is niet alleen groter, maar ook grootser. Het toont ook de laatste ontwikkelingen.



Hiernaast ziet U een reproductie van een ouder werk van Popke Bakker, waarvan op de tentoonstelling een model van meer dan een meter hoog te bewonderen is. Het ziet er van elk standpunt bekeken anders uit en het blijft boeien. Vergelijkt men het met het meetkundige geraamte: een regelmatig twaalfvlak, dan valt op dat het werken in ruimtelijk verstek iets heel nieuws aan lang bekende figuren toevoegt.

Het werken in ruimtelijk verstek berust op heel simpele principes. Ze zijn gemakkelijk te doorzien en als het U uitgelegd wordt, lijkt het ontwerpen en uitvoeren van nieuwe sculpturen waarschijnlijk bijzonder eenvoudig. Toch valt dat tegen! Eerstens moet U weten wat U wilt maken en ten tweede blijft het een samenspel van Kunst en Wiskunde.

Nu is het berekenen van dubbelverstekhoeken niet moeilijk, maar er komt toch stereometrie en goniometrie bij te pas. Verder kan men niet zomaar met het eerste balkje beginnen anders krijgt men teveel verschillende balkjes en vertonen ze niet overal dezelfde kanteling in de ruimte.

Met behulp van de computer kan het allemaal snel en exact. Koos Verhoeff heeft verschillende programma's gemaakt voor het berekenen van de nodige gegevens om tot een gave constructie te komen. Daarmee kan de computer alle gegevens over de beide hoeken van het dubbelverstek, de lengte van de balkjes uitprinten. Ook kan van elk balkje een uitslag geprint worden en eventueel verschillende aanzichten van het voorwerp, zoals het worden zal.

Het ars et mathesis-bestuur heeft zich jarenlang beziggehouden met de voorbereiding van het tentoonstellen van de werken van Bakker en Verhoeff. Hun geheel nieuwe werkwijze voerde naar geheel nieuwe vormen. Het bekijken ervan is zonder meer een lust voor het oog (U heeft trouwens in de loop van de jaren al met verschillende van hun werken kennis kunnen maken op de Ars-et-Mathesisdagen), maar men geniet er meer van als men de achtergronden en het constructieprincipe doorziet. We zijn daarom blij dat tegelijk met de tentoonstelling (die overigens in de eerste drie maanden van 1993 ook te zien zal zijn in Het Kantoor van de Toekomst in 's Hertogenbosch) een AO-boekje uitkomt met als titel WISKUNSTIGE SCHOONHEID en dat juist deze achtergronden en het constructieprincipe behandelt, aan de hand van een aantal tekeningen en foto's die ook op de tentoonstelling aanwezig zijn. We hebben een klein aantal AO-boekjes door laten drukken: U kunt ze tijdens de tentoonstelling kopen.

Herman Lieve maakt houten reliefs met wiskundige figuren. Zijn werk sluit mooi aan bij het ruimtelijke werk van beide andere kunstenaars.

TEKENEN ALS ESCHER
MET HULP VAN DE COMPUTER

door

Hans Kuiper

Op 9 november 1991 vertelde ik op de Ars-et-Mathesis-dag hoe ik met behulp van de computer kon tekenen als Escher. Hier volgt een korte samenvatting, met een aantal illustraties.

Tekenprogramma

Ik maakte een computerprogramma dat ervoor zorgt dat er op meer plaatsen gelijktijdig wordt getekend. De computer zorgt via het programma ervoor dat een op het beeldscherm getekend lijntje in veelvoud -verplaatst, gespiegeld dan wel gedraaid wordt weergegeven, afhankelijk van het gekozen systeem. Het programma beperkt zich tot rechthoekige systemen.
De computer helpt bij het tekenen. Het tekenen moet je echter zelf doen. En dat is, ook met de computer, een moeizaam karwei.

Kettingreactie

Ik schreef hierover een artikeltje in de HCC-nieuwsbrief, een blad voor computerhobbyisten. Ruben Hertogs las mijn artikel en attendeerde me op Ars et Mathesis. Dat bracht een soort kettingreactie op gang: Ik las in Arthesis over John Osborn uit California, die een blad uitgeeft genaamd The Amphographer. Ik stuurde hem een fotokopie van mijn artikel, dat hij plaatste in zijn blad. Dat gaf weer post van liefhebbers uit de VS. Leuk zoiets.

Ik tekende diverse regelmatige vlakvullingen zoals:
Donald Duck, Kus, Zeemeerminnen en Voetballers.

Vervormingen

Ik kreeg de behoefte om de regelmatige vlakvullingen op een bol te projecteren. Ik wilde mijn voetballers op een bal geprojecteerd zien. Ik maakte hiervoor een apart vervormingsprogramma. Als je in zo'n programma de functie die de bolprojectie beschrijft, vervangt door een andere functie dan zijn er weer vele mogelijkheden voor fraaie vervormingen. Deze komen het best tot zijn recht bij eenvoudige vlakverdelingen.

Zwart-Wit

Een ander aardig effect geeft het omkeren van kleur: wat wit is, wordt zwart en omgekeerd.

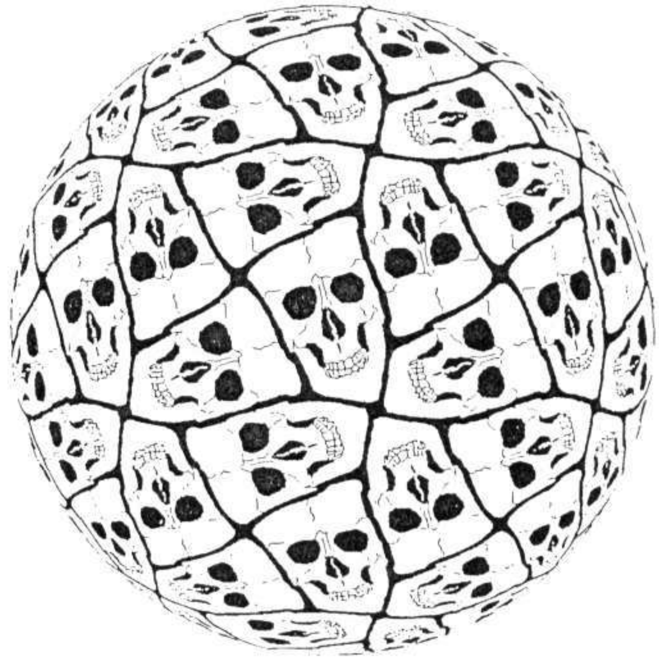
Tentoonstelling

Eind 1990 werd mijn werk in het Bunnikse gemeentehuis tentoongesteld. Iets dat ik bij het intypen van mijn eerste programmaregel niet had kunnen vermoeden.

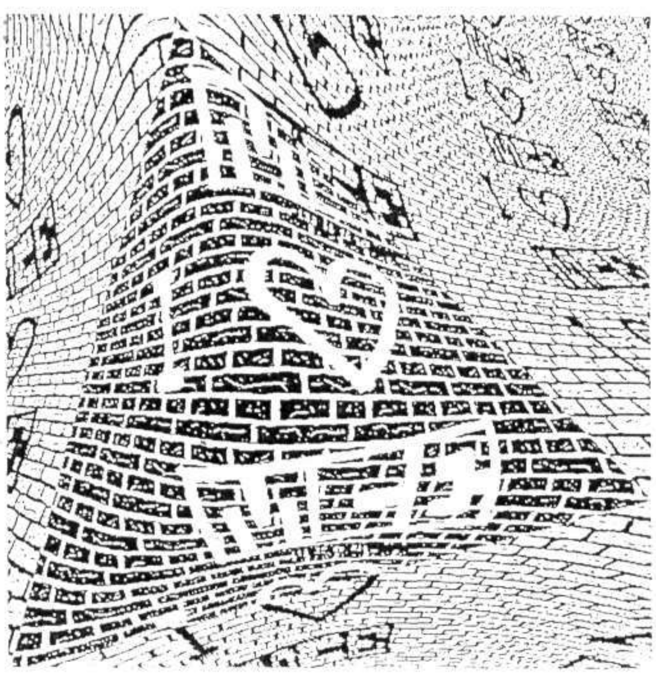
Wat volgt?

Ik ben van plan mijn programma uit te breiden met een tekensysteem met gelijkzijdige driehoeken als basis.
Verder wil ik een programma maken van een zuivere regelmatige vlakvulling op een bol.

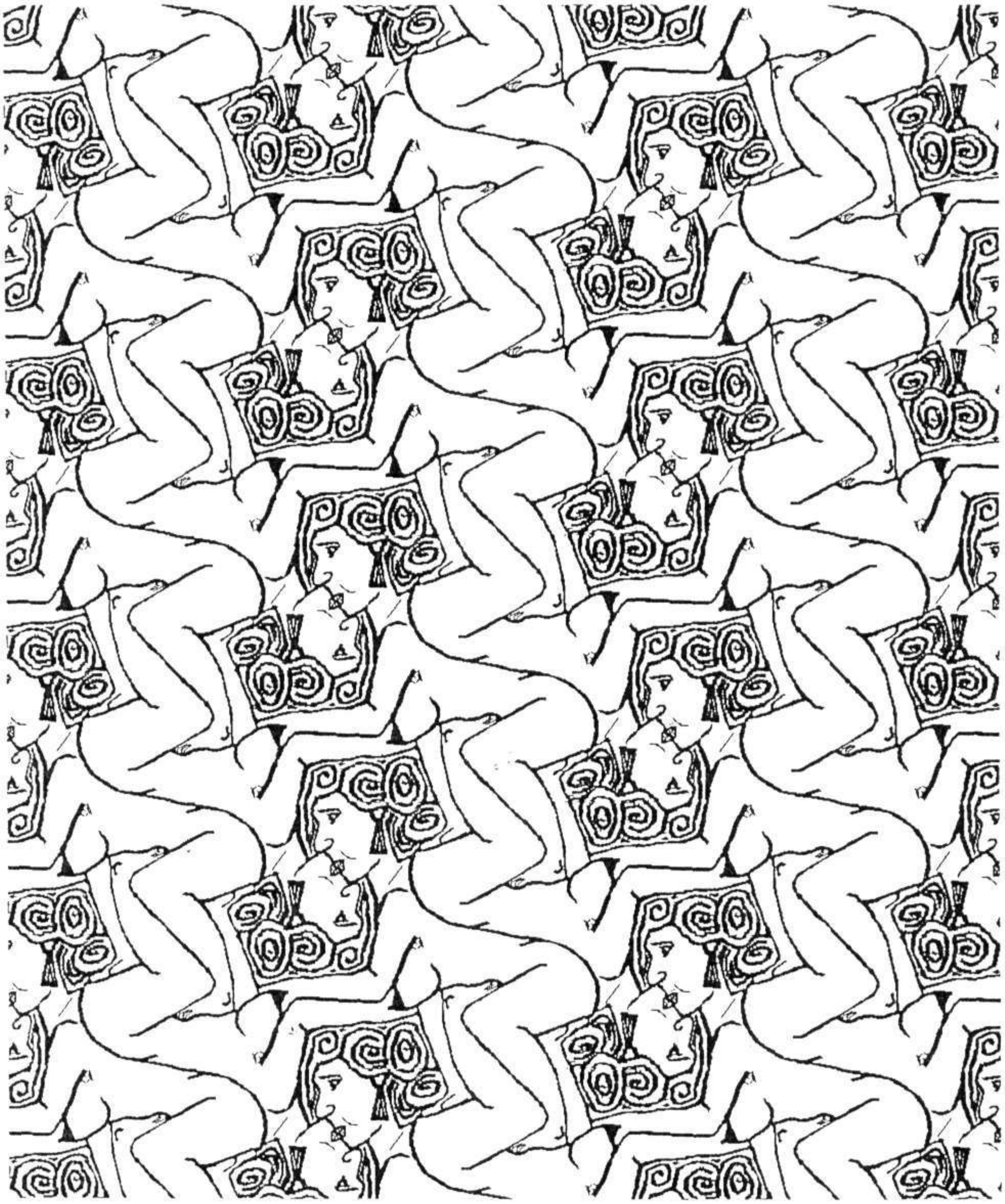
'ZEEMEERMINNEN'
ESCHER-LOOK-A-LIKE
©1990 by Hans Kuiper, Bunnik, Holland.



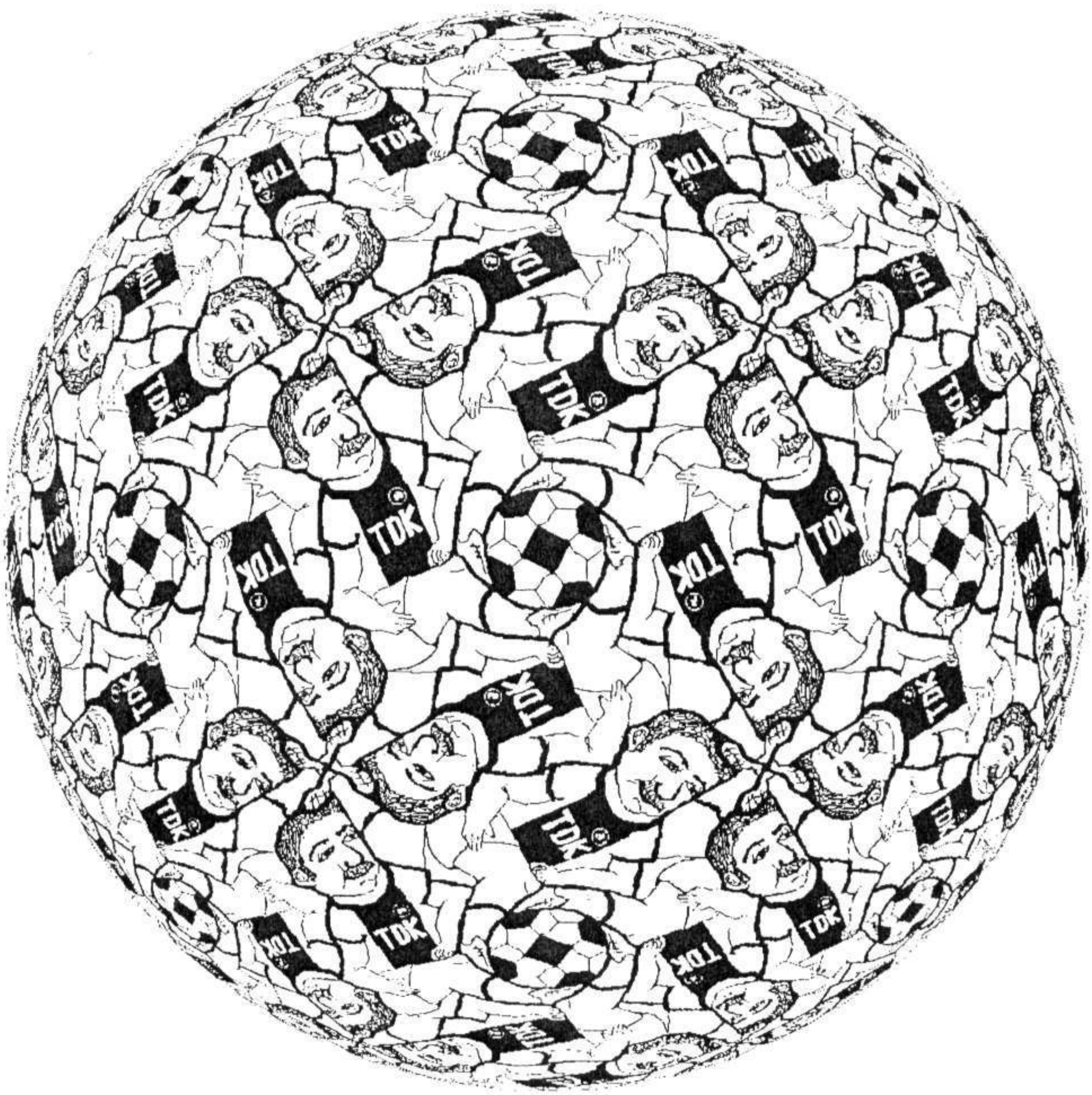
'FRANKENSTEIN'S SCHEDEL'
ESCHER-LOOK-A-LIKE
© 1990 by Hans Kuiper, Bunnik, Holland.



[illegible] Escher-Look-A-Like Copyright 1990 by Hans Kuiper Bunnik



ESCHER-LOOK-A-LIKE Copyright 1990 by Hans Kuiper, Bunnik



'VOETBAL'
ESCHER-LOOK-A-LIKE
© 1990 by Hans Kuiper, Bunnik, Holland.

VIERKANTJES, EEN WONDERLIJKE GETALLENREEKS EN EEN SPIRAAL. dR

Figuur 1 is als volgt ontstaan: eerst zijn twee vierkantjes A en B getekend. Links ertegenaan is een groter vierkant C tegen A en B aan getekend, enzovoort. U begrijpt, dat de figuur eindeloos verder getekend kan worden.
Misschien doet het U denken aan een schilderij van Mondriaan; U zou er zoiets van kunnen maken als U de vierkanten invult met geel rood en blauw.
Als we de opeenvolgende lengten van de zijden van de vierkanten noteren krijgen we de volgende reeks:

1 1 2 3 5 8 ? ?

Hoe de vraagtekens ingevuld moeten worden is wel te te raden als we de reeds aanwezige getallen van de reeks met elkaar vergelijken en het is waarschijnlijk ineens duidelijk, als we kijken hoe in figuur 1 de lengte van de zijde van elk nieuw vierkant ontstaat. Elk volgend getal krijgen we door de twee voorafgaande bij elkaar op te tellen.
Deze reeks is genoemd naar Leonardo Fibonacci, die ruim 800 jaar geleden geboren werd in Pisa. Hij publiceerde in 1202 een algebra-boek, waarin hij de grote voordelen aantoonde van het gebruik van de arabische schrijfwijze van getallen (zoals wij die kennen) vergeleken met de romeinse. In dat boek komt de volgende opgave voor:
Hoeveel paar konijnen krijgt men in één jaar, als we beginnen met
één paar en als elk paar iedere maand een nieuw paar voortbrengt, dat telkens vanaf de tweede maand vruchtbaar wordt.
Bij het oplossen van dit vraagstuk komt de reeks getallen voor die we hierboven vonden voor de opeenvolgende lengten van de zijden der vierkanten. Pas veel later heeft men deze reeks naar Fibonacci genoemd. (Edward Lucas in 1877).

Bij het bestuderen van getallenreeksen gebruikt men soms het volgende trucje: bepaal telkens het verschil van twee opeenvolgende getallen en schrijf dat eronder. Men krijgt dan een nieuwe reeks en doet daar hetzelfde mee.
Bij een rekenkundige reeks wordt dat erg simpel; bijvoorbeeld:

1o 14 18 24
4 4 4
0 0

Nemen we de reeks van de kwadraten van de opeenvolgende getallen:

1 4 9 16 25 36 49
3 5 7 9 11 13
2 2 2 2 2
0 0 0 0

We proberen dit ook met de Fibonaccireeks:

1	1	2	3	5	8	13	21	34
0	1	1	2	3	5	8	21	

We zien hier dat de verschillen weer precies dezelfde reeks opleveren, zodat het" geen zin heeft om met hetzelfde procédé verder te gaan. Dit lijkt een aardige eigenschap, maar bij even nadenken zien we dat die heel voor de hand liggend is.

Bij reeksen is het altijd prettig als we een bepaalde term van de reeks kunnen berekenen, zonder alle voorgaande bepaald te hebben. Bestaat er zo'n formule voor de termen van de Fibonacci-reeks?
Ja, maar die is helemaal niet zo eenvoudig af te leiden. De formule werd pas na 1800 door Binet gevonden :
de n-de term van de Fibonaccireeks is $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

waarbij n achtereenvolgens is: 0,1,2,3,4, ... etc.
Ook zonder gebruik van een zakrekenmachientje, zijn de eerste termen van de reeks snel te berekenen en dan is ook goed te volgen hoe de $\sqrt{5}$ uit de uitkomst verdwijnt.
Bij het berekenen van wat meer getallen uit de reeks , blijkt duidelijk, dat de tweede term van de formule van Binet snel heel klein wordt.
Zo komt er bij het vijfde Fibonaccigetal al:
5,0403- 0,0403.
Bij het berekenen van grotere Fibonacci-getallen kunnen we daarom zonder bezwaar alleen het eerste deel van de formule gebruiken: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

en dan de uitkomst afronden naar het dichtstbijgelegen hele getal.

We hebben de opeenvolgende Fibonaccigetallen al van elkaar afgetrokken en ontdekt, dat dan weer precies dezelfde reeks tevoorschijn komt. Nog merkwaardiger(en niet zo voorspelbaar) is wat er gebeurt, als we telkens twee opeenvolgende getallen op elkaar delen. Het resultaat zien we in de volgende tabel:

nummer	F-getal	quotient
1	1	
		1
2	1	
		2
3	2	
		1,5
4	3	
		1,66
5	5	
		1,6
6	8	

nummer	F-getal	quotient
29	514229	
		1,6180339
30	832040	
		1,6180339
31	1346269	
		enzovoort!

Bij het bestuderen van de tabel vallen drie dingen op:

De quotiënten schommelen rond een bepaald getal, dat steeds lichter benaderd wordt.

Al heel snel zijn de eerste 7 decimalen van het quotiënt onveranderlijk, en daaruit volgt dat de reeks al heel snel gaat lijken op een meetkundige reeks, want elk volgend getal wordt uit het voorafgaande gevormd door het te vermenigvuldigen met 1,6180339 (waarbij dan weer afgerond moet worden naar het dichtstbijzijnde hele getal).

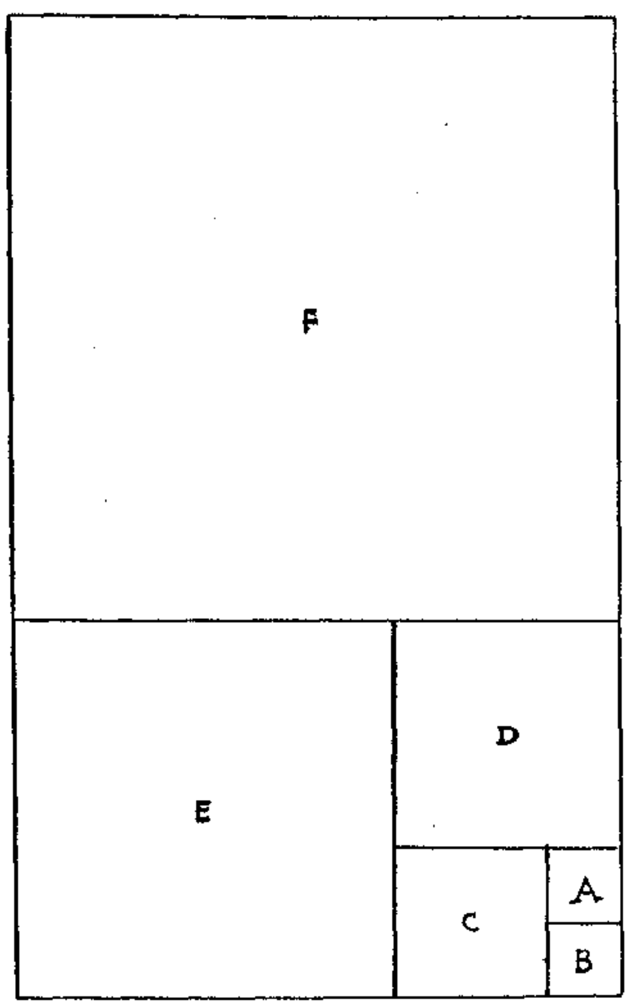
Ten slotte: dat getal is in de wiskunde een goede bekende. Het is de zogenaamde gulden snede verhouding (aangeduid met de griekse letter Φ).

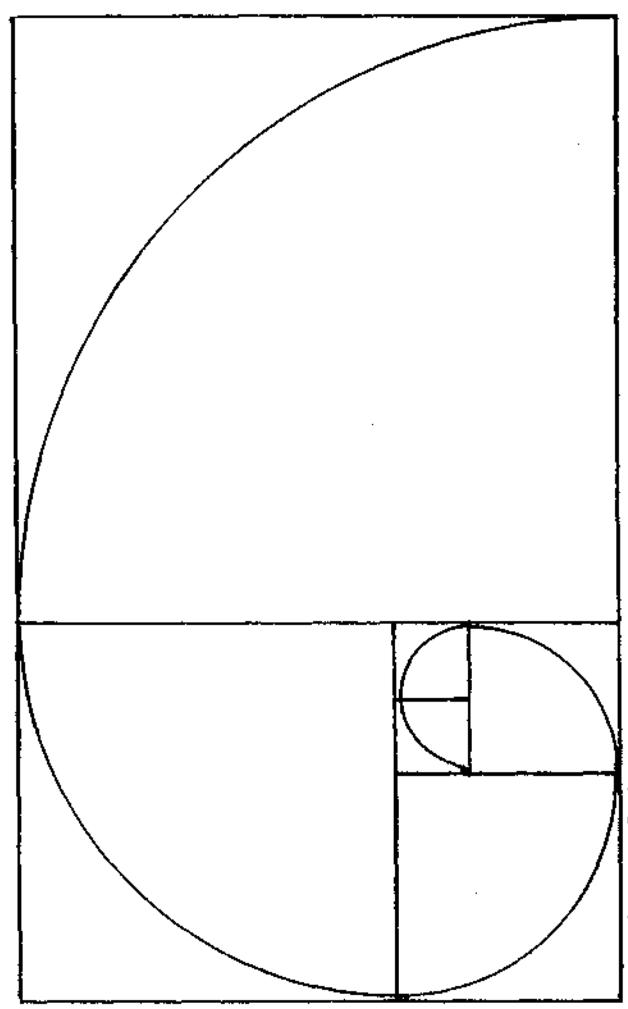
In een volgend artikel komen we hierop terug. Nu eindigen we met een andere rangschikking van figuur 1.

We beginnen weer met de twee kleine vierkanten en bouwen de grotere vierkanten er spiraalsgewijs omheen: Eerst rechts een vierkant, dan van onderen, dan weer links, enzovoort. Als we de passerpunt elke keer in een hoekpunt van de vierkanten zetten en een kwart cirkel tekenen ontstaat een quasi-spiraal, opgebouwd uit kwart cirkelbogen. (Figuur 2).

Over Fibonacci-getallen is nog veel meer te vertellen, zoveel, dat er zelfs een soort Fibonacci fanclub bestaat die vier maal per jaar een tijdschrift uitbrengt: the Fibonacci Quarterly, dat in 1963 voor het eerst verscheen.

FIGUUR 1





FIGUUR 2