

# Een wiskundige reconstructie van tekening nummer 53 van de Topkapi boekrol

MATTIAS VISSER, Minkema College, Woerden  
Utrecht, november 2006

## Inleiding

Het verhaal over de Topkapi boekrol dat u nu gepresenteerd krijgt, is een vervolg op het artikel in Arthesis, jaargang 19, nummer 2. Daarin vindt u een beschrijving van de Topkapi boekrol en een samenvatting van het prachtige boek van de Turkse kunsthistorica Gülru Necipoğlu. [Zie Necipoğlu.] Voorts hield ik een pleidooi om met behulp van vlakke meetkunde de Topkapi boekrol vanuit wiskundig en historisch perspectief te benaderen.

Zo ontstond een zelfbedachte methode: mijn wiskundige analyse. Dit is een concreet meetkundige aanpak die de mozaïekmakers bekend geweest moet zijn en niet van recentere wiskunde (groepentheorie e.d.) gebruik maakt. Deze methode kan toegepast worden op een selectie (goed leesbaar en vanwege vlakke meetkunde goed bruikbaar voor middelbare scholieren) van tien tekeningen van de Topkapi boekrol. In mijn methode gebruik ik drie lijnsoorten. Twee daarvan zijn aanwezig in de tien tekeningen, stippellijnen en zwarte lijnen. De derde lijnsoort is niet in de tekeningen aanwezig en noem ik hulplijnen.

Deze hulplijnen zijn een belangrijk onderdeel in het proces voor mijn centrale vraag: “Wat zijn de beslismomenten van de handelswerklieden geweest?” Of anders gesteld: “Wat zijn de keuzemogelijkheden in een patroon van stippellijnen en zwarte lijnen?” Verder zal ik het verband tussen de drie lijnsoorten aantonen, en mijn ontdekking dat de hulplijnen en de stippellijnen samen de zwarte lijnen vastleggen. Deze aspecten komen niet voor in het werk van Necipoğlu.

Tijdens mijn onderzoek merkte ik dat er zeer weinig documentatie over mozaïeken in de Islamitische Kunst voorradig is. De Topkapi boekrol daarentegen is een prachtige illustratie van meetkundige patronen in de 16<sup>e</sup> eeuw, echter een tekstuele verklaring ontbreekt. Voor de wiskundige kennis van de toenmalige mozaïekmakers met o.a. de Gulden Snede verwijs ik u naar het vorige artikel over de Topkapi boekrol in Arthesis.

In dit tweede artikel wil ik u meenemen naar de schoonheid van de tien geselecteerde tekeningen. Aanvankelijk was het idee om de algemene principes van de drie lijnsoorten weer te geven [zie scriptie Visser]. Na overleg met de redactie van Arthesis is ervoor gekozen om mijn bedachte methode te volgen door middel van één van de 10 tekeningen (tekening 53), om daarna de lezer de gelegenheid te geven om zelf te “experimenteren” met de overige 9 tekeningen: nummer 50, 54, 55, 57, 59, 61, 62, 63, 64 [volgens de nummering van Necipoğlu]; zie Bijlage.

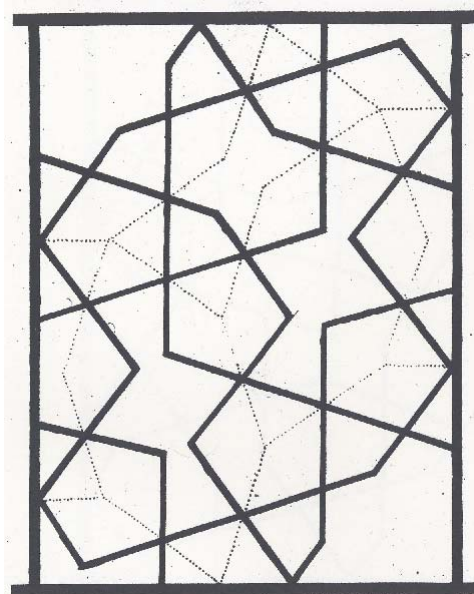
## Een wiskundige analyse van tekening 53 van de Topkapi boekrol

### Voorbeschouwing

Ter introductie ziet u een kopie van tekening 53 van de Topkapi boekrol, met enkele vragen om over na te denken.

1. Kijkend naar de stippellijnen, welke meetkundige figuren kent u? Idem zwarte lijnen?

2. Herkent u symmetrieën? Zo ja, waar en welke?
3. Zijn alle stippellijnstukken even lang? Idem zwarte lijnstukken?



Plaatje 1: Tekening 53 uit Topkapi boek Necipoğlu

Het tekenen van de reconstructie van tekening 53 vanuit wiskundig perspectief noem ik de ideale tekening. Het is van belang om onderscheid te maken tussen waarneming in tekening 53 (zie plaatje boven) en de ideale tekening. Berekeningen gelden alleen voor de ideale tekening. In het vorige artikel is bewezen dat voor het blote oog lijnstukjes in de echte tekening even lang lijken (waarschijnlijk ter vervolmaking van de symmetrie), maar in de ideale tekening niet exact even lang zijn. Wanneer we zelf een reconstructie van een tekening maken, dan zullen er snel kleine afwijkingen optreden, die gevolg hebben voor de waarneming van het oog.

## Stap één – Hulplijnen

### Inleiding

Om een beeld te krijgen wat er gaat gebeuren in stap één eerst een beschrijving van de hulplijnen met het plaatje van tekening 53 (plaatje boven) als achtergrond. Tekening 53 is een rechthoek en bestaat uit stippellijnen<sup>1</sup> en zwarte lijnen. De hulplijnen worden straks in de ideale tekening toegevoegd en als eerste ingevoerd.

De hulplijnen zijn rechte lijnen die getrokken worden vanuit de hoekpunten linksboven en rechtsonder. Het aantal hulplijnen uit één hoekpunt is vier, zó dat de rechte hoek verdeeld wordt in vijf gelijke hoeken van 18 graden. De hulplijnen zullen deels samenvallen met de stippellijnen. De hulplijn uit het hoekpunt linksboven en de hulplijn uit het hoekpunt rechtsonder vallen samen tot één hulplijn, een diagonaal van de rechthoek. De grootte van de hoek tussen deze diagonaal en een lange zijde van de rechthoek is 36 graden. Voorts zijn de twee hoekpunten van de rechthoek het middelpunt van een regelmatige tienhoek, in tekening 53 is een kwart van een gestippelde tienhoek te zien.

Om de wiskundige analyse goed te kunnen volgen krijgen de hulplijnen een nummer ter referentie en belangrijke punten een letter. Schrijf bij de instructies in de tekening

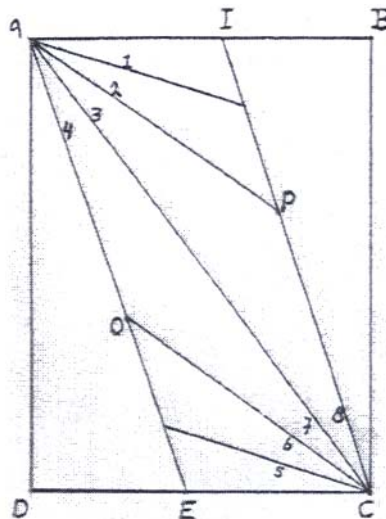
<sup>1</sup> De zwarte gestippelde lijnen zijn rode stippellijnen in de Topkapi boekrol van Necipoğlu.

desbetreffend nummer of letter op. Benodigde voorkennis: kennis van vlakke meetkundige figuren, meten en redeneren met hoeken, begrippen zoals loodlijn en bisectrice, lijn en puntsymmetrie, en eenvoudige goniometrie.

### Instructies voor het tekenen van de hulplijnen in de ideale tekening

Benodigdheden zijn een leeg papier (A4 formaat), passer, liniaal (met centimeters) en gradenboog (geodriehoek), potlood en gum.

1. Teken rechthoek ABCD, met punt A linksboven en punten B, C en D met de wijzers van de klok mee. Schrijf de letters ook op in de tekening.  $\angle DAC = 36^\circ$  en lengte  $AD = 10$  cm, de breedte  $CD = AD \times \tan 36^\circ \approx 7,3$  cm. Teken ook diagonaal AC.
2. De bisectrice van hoek DAC snijdt CD in het punt E, de bisectrice van hoek BCA snijdt AB in het punt I. Teken AE en CI. Vierhoek AECI is een ... ? Toon dat aan.
3. Het spiegelbeeld van lijnstuk AE in diagonaal AC snijdt CI in het punt P. Teken AP. Het spiegelbeeld van lijnstuk CI in diagonaal AC snijdt AE in het punt O. Teken CO. Vierhoek AOCP is een ... ? Toon dat aan.
4. Uit de voorgaande instructies geldt:  $\angle IAP = \angle ECO = 36^\circ$ . Wanneer de bisectrice van  $\angle IAP$  getekend is (tot aan lijnstuk PI) en wanneer de bisectrice van  $\angle ECO$  getekend is (tot aan EO) dan zijn rechte hoeken A en C verdeeld in vijf gelijke hoeken van 18 graden.
5. Noem de vier hulplijnen vanuit hoek A hulplijn 1 (bisectrice  $\angle IAP$ ), hulplijn 2 (AP), hulplijn 3 (de helft van AC), hulplijn 4 (AE). Noem de vier hulplijnen vanuit hoek C hulplijn 5 (bisectrice  $\angle ECO$ ), hulplijn 6 (CO), hulplijn 7 (de helft van AC), hulplijn 8 (CI). Voor het resultaat van bovenstaande instructies zie onderstaande figuur.



Plaatje 2: Hulplijnen tek53

Antwoorden van instructies.

2. Figuur AECI is een parallellogram, lijnstukken AI en CE zijn evenwijdig en lijnstukken AI en CE evenzo, immers  $\angle AED = \angle DCI = 72^\circ$ .
3. Figuur AOCP is een ruit, want  $\angle CAO = \angle CAP = \angle ACO = \angle ACP = 18^\circ$ , lijnstukken AP en PC, en lijnstukken AO en OC zijn even lang, bovendien ligt diagonaal AC in driehoek ACP en driehoek ACO en zijn deze twee driehoeken congruent.

## Stap twee – Stippellijnen

### Inleiding

Om de stippellijnen te kunnen tekenen maken we gebruik van de hulplijnen, die de stippellijnen ook zullen vastleggen. Sommige hulplijnen en stippellijnen vallen samen, daarom zullen er onderdelen van hulplijnen vervangen worden door stippellijnen. Alle stippellijnen samen vormen een raamwerk, bijzondere snijpunten van dit raamwerk krijgen een letter ter voorbereiding op de complexiteit van de zwarte lijnen. Om de stippellijnen te tekenen zullen we gebruik maken van puntsymmetrie ten opzicht van het middelpunt van de rechthoek ABCD en van lokale lijnsymmetrie met als symmetrieassen de hulplijnen.

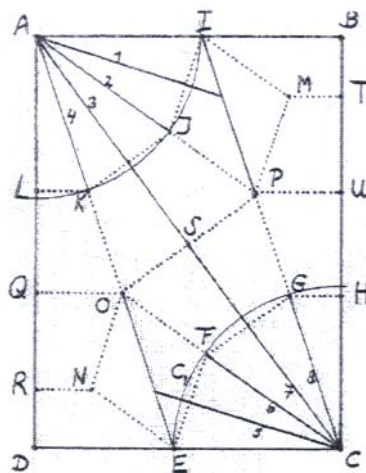
### Instructies voor het tekenen van de stippellijnen in de ideale tekening

We gaan verder met het resultaat van de instructies van de hulplijnen.

1. Teken een cirkelboog om hoekpunt C met straal CE. De kwart cirkelboog (mag later verwijderd worden) snijdt hulplijn 6 in het punt F en hulplijn 8 in punt G. Stippel de volgende lijnstukjes: EF, FG, GH (met GH loodrecht op BC en punt H op lijnstuk BC).

*Resultaten tot nu toe:*

- a. *Driehoek CEF is congruent met driehoek CFG.*
  - b. *Driehoek CFG is gelijkbenig, hulplijn 7 (bisectrice, zwaartelijn en hoogtelijn) verdeelt driehoek CFG in twee congruente driehoeken (idem hulplijn 5 in driehoek CEF) en is driehoek CGH congruent aan deze twee driehoeken. Gevolg:*
  - c. *Figuur CEF GH bestaat uit vijf congruente driehoeken en is een kwart van een regelmatige tienhoek.*
2. Stippel op dezelfde manier om punt A een kwart (AIJKL) van een regelmatige tienhoek.
  3. Driehoek EFO is gelijkbenig (toon aan). Stippel het spiegelbeeld van driehoek EFO in hulplijn 4, figuur EFON is een ruit. Stippel ruit IJPM evenzo.
  4. Stippel lijnstukken NR en OQ loodrecht op AD, en stippel lijnstukken PU en MT loodrecht op BC. Stippel ook lijnstukken GP, JP, FO, KO en PO. Overigens is lijnstuk PO evenwijdig aan lijnstukken FG en JK (toon aan). Voor het resultaat van bovenstaande instructies zie onderstaande figuur.



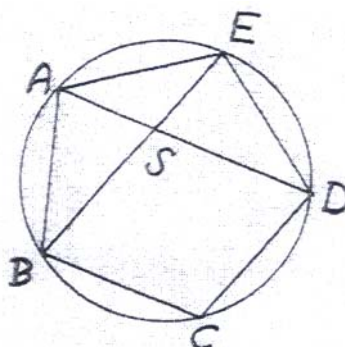
Plaatje 3: Stippellijnen tek53

### Mooie resultaten als gevolg van de instructies van hulplijnen en stippellijnen

1. De hoeken in ideale tekening 53 tussen a) twee hulplijnen, b) twee stippellijnen en c) een hulplijn en stippelijijn, zijn allen veelvouden van 18 graden.
2. Lijnstukken AQ en AD verhouden zich als  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  staat tot 1, en deze verhouding is in de geschiedenis van de wiskunde bekend als de gulden snede.

Voor informatie over de gulden snede verwijs ik u naar het vorige artikel. Wel zal ik een mooi meetkundig bewijs van de gulden snede in tekening 53 laten zien.<sup>2</sup> Het meetkundige bewijs is gebaseerd op de Elementen van Euclides boek 13, stelling 8 (onder de stelling heb ik een figuur toegevoegd ter illustratie):

“Indien in een gelijkzijdigen en gelijkhoekigen vijfhoek rechten twee opeenvolgende hoeken overspannen, verdelen zij elkaar in een uiterste en middelste reden en hun grootste stukken zijn gelijk aan de zijde van de vijfhoek.”<sup>3</sup>



Plaatje 4: Vijfhoek + Cirkel

Volgens Stelling 8 (Euclides) komt de gulden snede als volgt voor (zie figuur hierboven):  $BE : BS = BS : SE$  en dat  $BS = AB$ .

In tekening 53 (hulplijnen en stippellijnen) is driehoek SAD (punt S is het middelpunt van rechthoek ABCD) een gelijkbenige driehoek (trek denkbeeldig lijnstuk DS) met basishoeken  $36^\circ$ . Voorts geldt dat driehoek AQS ook gelijkbenig is, want  $AS = AQ$  (driehoek AOS is congruent met driehoek AOQ) en tophoek QAS is  $36^\circ$ . Vergelijk driehoek SAD met “verdelingspunt” Q (tekening 53) met driehoek ABE met “verdelingspunt” S (zie figuur bij Stelling 8 Euclides) dan zien we de gulden snede als volgt:  $AD : AQ = AQ : QD$ .

## Stap drie – Zwarte lijnen

### Inleiding

De zwarte lijnen (lees lijnstukken) reconstrueren in tekening 53 is omvangrijker dan bij de hulplijnen en stippellijnen, er zijn gewoon meer zwarte lijnen. Een probleem met het omschrijven van de instructies bij de zwarte lijnen is dat de omschrijving soms veel uitvoeriger is dan het tekenen zelf. Tijdens het tekenen ziet u soms sneller welke meetkundige figuren geconstrueerd moeten worden.

De zwarte lijnen snijden elkaar vaak paarsgewijs of in een punt, dat op een hulplijn of stippelijlijn ligt, of middels een knik, deze knik ligt soms op een hulplijn. Vanuit wiskundig perspectief beschouw ik de knik tussen twee zwarte lijnen als een snijpunt tussen twee lijnen. Eerst zullen de zwarte lijnen rondom de punten E, I, O en P vast gelegd worden (zie stippellijnen tekening 53). Deze lijnen vormen (gedeeltelijk) een regelmatige vijfhoek, waarvan de hoekpunten meestal op stippellijnen liggen. Daarna zullen de zwarte lijnen, die een knik vormen aan bod komen. Deze knikken leggen we vast door de zijden van de eerder genoemde vijfhoeken te verlengen en soms hulplijnen in de twee regelmatige (kwart)

<sup>2</sup> Het kan op meerdere manieren bewezen worden, o.a. ook met goniometrische verhoudingen.

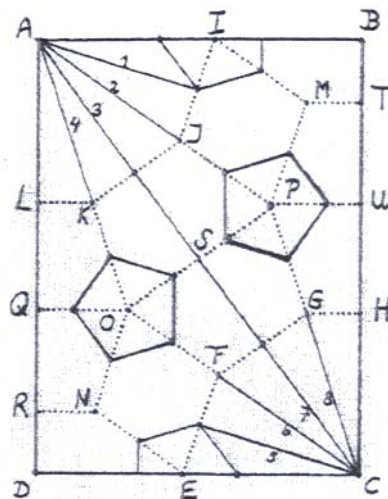
<sup>3</sup> Zie [Dijksterhuis, blz 252.]

tienhoeken (om hoekpunten A en C) te snijden. Verder spelen symmetrie overwegingen een belangrijke rol.

### Snijpunten van twee zwarte lijnen die elkaar snijden op het midden van een stippellijn

We gaan verder met het resultaat van de instructies van de hulplijnen en stippellijnen. Wel dienen de cirkelbogen om punten A en C weg geveegd te worden met een gum.

1. Snijpunten van twee zwarte lijnen liggen o.a. op de middens van ruiten EFON en IJPM, en op de middens van de halfregelmatige zeshoek FGPJKO.
2. Mijn aanname in tekening 53 is: het stippellijnstuk met lengte  $\frac{1}{2} FG$  is de basiseenheid om het stelsel van zwarte lijnen van de (ideale) tekening vast te leggen<sup>4</sup>. Deze basiseenheid ligt ook op: OQ en OP met een afstand van  $\frac{1}{2} FG$  van O, op PU en OP met  $\frac{1}{2} FG$  van P.<sup>5</sup> De punten H, T, L, R zijn ook snijpunten van twee zwarte lijnen, echter deze snijpunten liggen op de rand van de rechthoek ABCD. De lengte van GH, MT, KL en NR is ook  $\frac{1}{2} FG$ . Dit mag de lezer zelf aantonen.
3. De vijf stippellijnstukken om punten O en P maken onderling een hoek van  $72^\circ$ . Op deze vijf stippellijnen liggen snijpunten van twee zwarte lijnen op afstand  $\frac{1}{2} FG$  van O en P. Teken nu de regelmatige vijfhoeken om O en P. Teken ook de regelmatige vijfhoek (een halve) om E en I op dezelfde manier, zij het dat een derde hoekpunt van de vijfhoek om E of I op zijde CD of AB ligt.



Plaatje 5: Met regelmatige vijfhoeken om punten E, I, O en P

### De tienpuntige ster

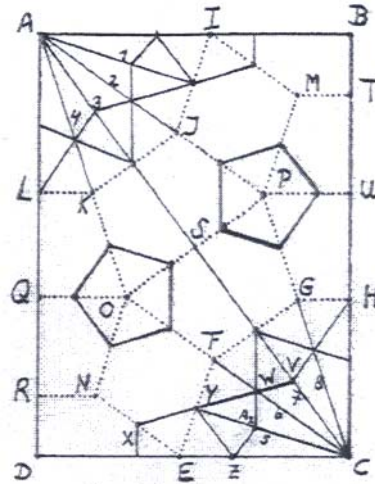
De zijden van de regelmatige vijfhoeken om E, I, O en P zijn belangrijk omdat ze een onderdeel zijn van langere zwarte lijnen. Deze zijden zullen verlengd worden en zo andere lijnen snijden, namelijk 1) hulplijnen, 2) de zijden van rechthoek ABCD en andere verlengde zwarte lijnen.

4. Begin met de halve vijfhoek om punt E. Deze vijfhoek heeft drie hoekpunten, noem X het midden van EN, noem Y het midden van EF en Z ligt op CE met lengte EZ is  $\frac{1}{2} FG$ .
5. Trek lijnstuk XY door tot en met hulplijn 7, noem dit snijpunt V. Trek lijnstuk HV. Noem het snijpunt van YV met hulplijn 6 punt W. HV is het spiegelbeeld van YV in hulplijn 7. Lezer mag aantonen dat vierhoek CWYZ een vlieger is. Gevolg is dat  $FW = EZ = \frac{1}{2} FG$ .

<sup>4</sup> Met het tekenen ontstaan afwijkingen, waardoor het mogelijk is dat de basiseenheid  $\frac{1}{2} FG$  niet overal exact even lang is in de reconstructie.

<sup>5</sup> In het vorige verhaal van de Topkapi-boekrol in Arthesis is aangetoond dat lengte OP niet exact in drie even lange lijnstukjes met lengte  $\frac{1}{2} FG$  verdeeld is, alhoewel dit voor het oog wel zo wel lijkt.

6. Trek de lijn vanuit het midden van FG via W tot en met hulplijn 5, noem het snijpunt A2. Teken ook A2Z. Lezer mag aantonen dat YWA2Z en CVWA2 vliegers zijn. Trek zo ook de lijn vanuit midden FG via snijpunt HV en CG naar zijde BC. Nu ligt de kwart tienvoudige ster vast. Teken op soortgelijke wijze de kwart tienvoudige ster in de kwart tienhoek AIJKL.

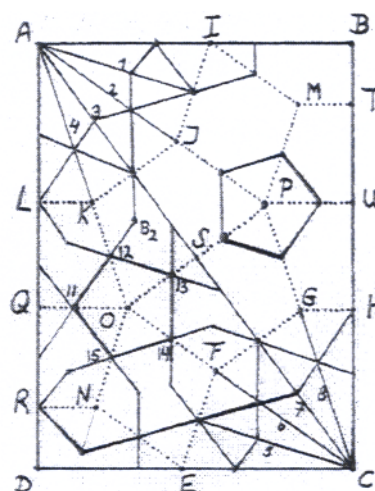


Plaatje 6: Met tien puntige sterren in kwart tienhoeken

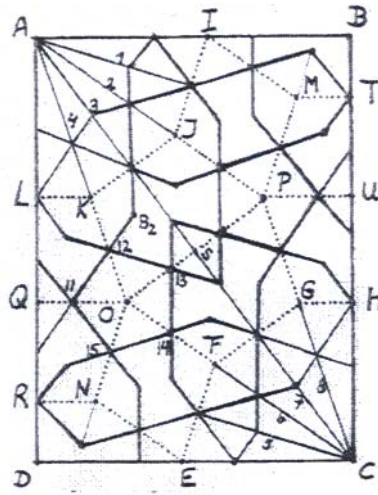
#### Verlengen van de zijden van de regelmatige vijfhoeken en tien puntige sterren

Vanwege spiegelsymmetrie van de zwarte lijnen in diagonaal AC zullen eerst de zwarte lijnen in driehoek ACD aan bod komen, in driehoek ABC gaat het op een dezelfde manier. De zijden van de regelmatige vijfhoek om punt O en punt E alsmede de lijnen van de tien puntige sterren om punten A en C zullen verlengd moeten worden. Bovendien zal er lokale lijnsymmetrie toegepast worden met als spiegelas hulplijn 4.

Het resultaat van bovenstaande verlengingen en symmetriën is het volgende plaatje. De instructies blijven weg vanwege de omvangrijke omschrijving. Kijk goed welke zwarte lijnen verlengd zijn, waar snijpunten zijn en/ of knikken zijn, en waar lijnsymmetrie is toegepast. Zie figuur 7. (ZWARTE LIJNSTUKJES IN DRIEHOEK ACD.)



Plaatje 7: Met uitbreiding zwarte lijnstukjes in driehoek ACD

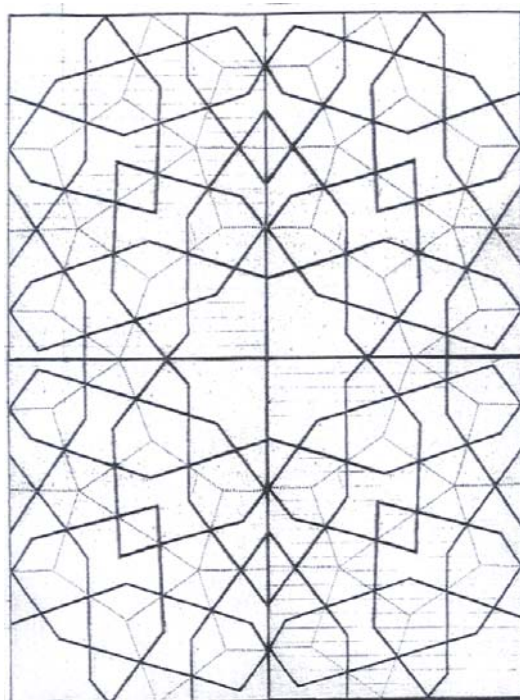


Plaatje 8: Met uitbreiding zwarte lijnstukjes in rechthoek ABCD

In de figuur 8 zijn alle zwarte lijnstukjes in driehoek ACD gespiegeld in diagonaal AC en krijgen we alle zwarte lijnstukjes in rechthoek ABCD. Het tekenen van de zwarte lijnen in tekening 53 is nu klaar.

### Kroonjuweel

Tekening 53 is als het ware een tegel van een mozaïek. De schoonheid van de mozaïeken zien we helemaal wanneer we meerdere tegels tegen elkaar aan leggen, waarbij er een paar keer lijnsymmetrie is toegepast. Het resultaat ziet u als kroonjuweel hieronder gepresenteerd.



Plaatje 9: Kroonjuweel, 4 keer tekening 53!!

### Afsluiting

In het tweede deel van de Topkapi boekrol heb ik mijn wiskundige reconstructie van tekening 53 aan u voorgelegd. Deze reconstructie is vermoedelijk een aardige benadering van de aanpak van de mozaïekmakers van de boekrol. Een soortgelijke aanpak kunt u (of mogelijke



leerlingen van u laten) toepassen op negen andere tekeningen uit de Topkapi boekrol, nummer 50, 54, 55, 57, 59, 61, 62, 63, 64 [volgens de nummering van Necipoğlu].

Hopelijk heeft u net zoals mij veel plezier met het tekenen en het ontdekken hoe zo'n tekening uit een boekrol van de 16<sup>de</sup> geconstrueerd kan worden. Dat als het ware de denkstappen van een mozaïekmaker uit de 16<sup>de</sup> eeuw voortleven bij een mens uit de 21<sup>ste</sup> eeuw, en de verwondering over deze kunst door gegeven kan worden!

Met speciale dank aan prof. dr Jan Hogendijk, inspirator en leermeester met betrekking tot de wiskundige kennis van meetkundige patronen in de Islamitische Kunst.

### **Bronvermelding.**

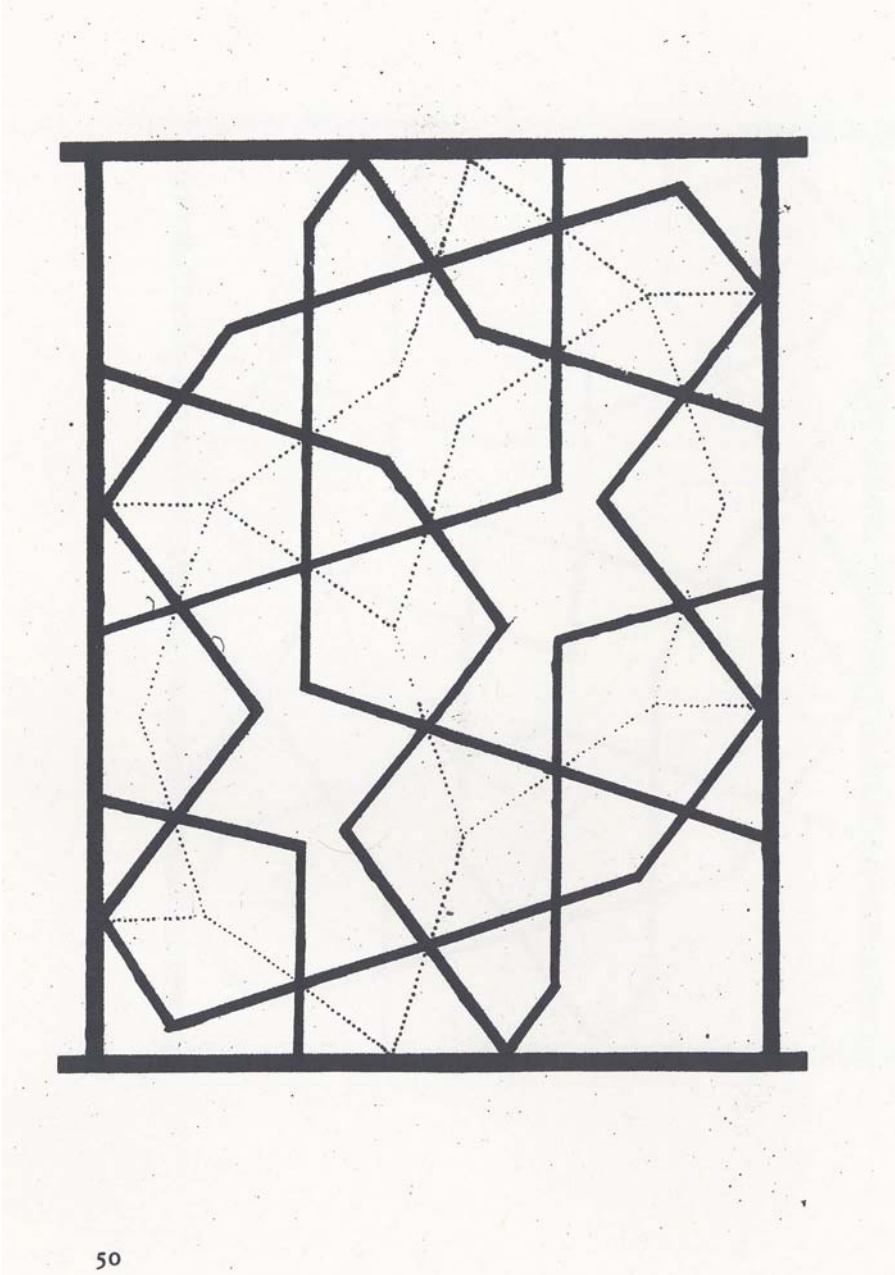
E.J. Dijksterhuis: *De Elementen van Euclides 2*. Groningen: Noordhoff, 1930, Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen deel 3.

G. Necipoğlu: *The Topkapi Scroll – Geometry and Ornament in Islamic Architecture*. Santa Monica: Getty Publishers, 1995.

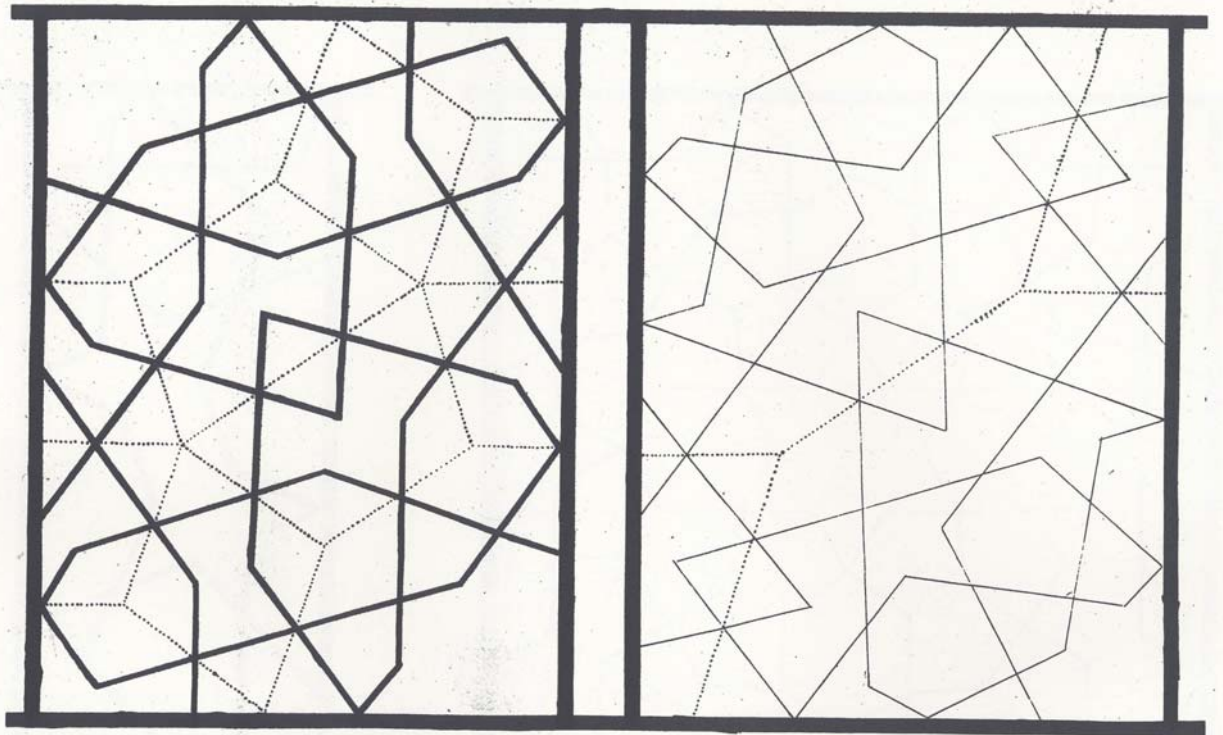
M.J. Visser: *De Topkapi boekrol vanuit wiskundig perspectief bekeken*. Utrecht, 2002, doctoraal scriptie wiskunde, Universiteit van Utrecht.

**Bijlage**

**Nummer 50**



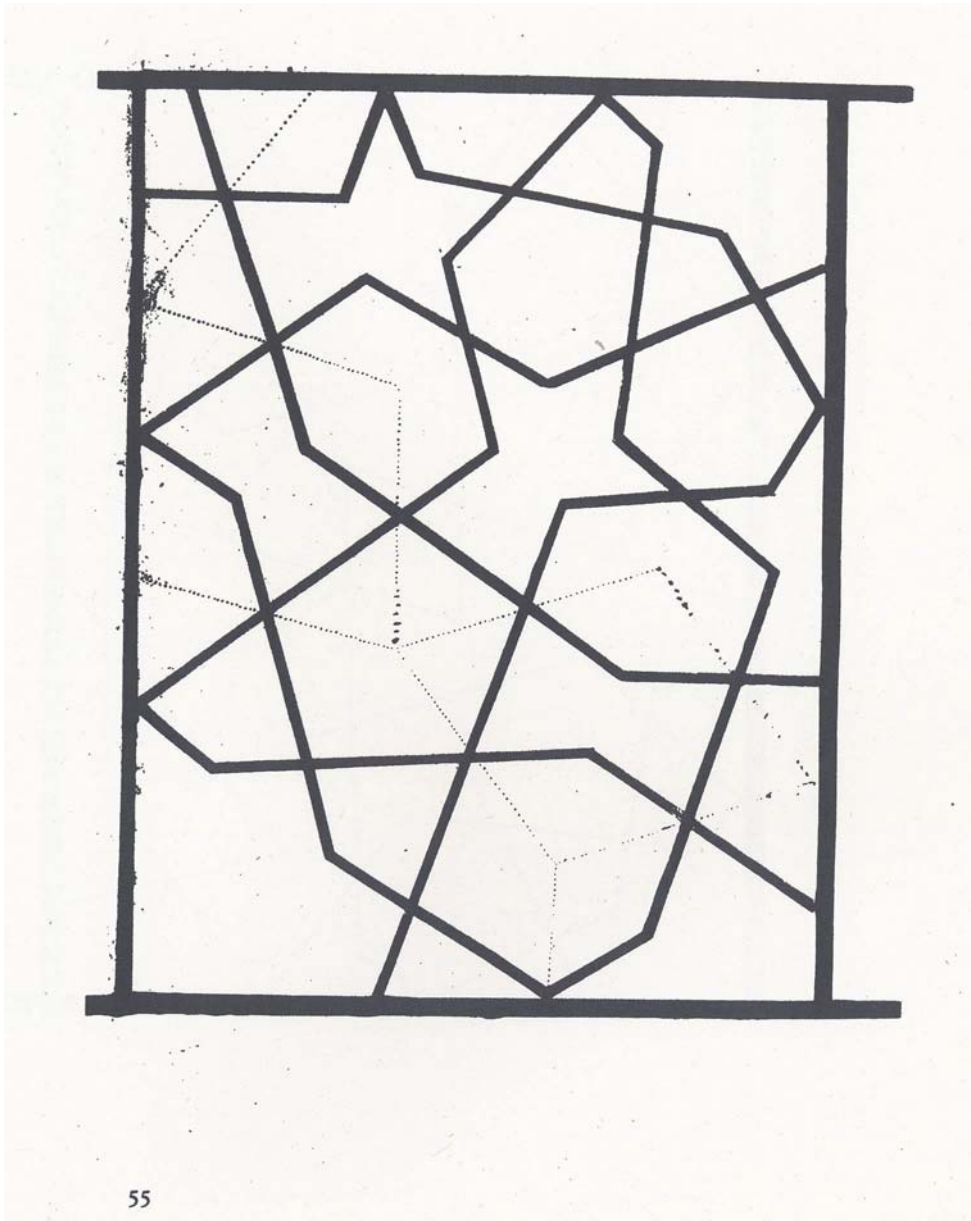
**Nummer 53 en 54**



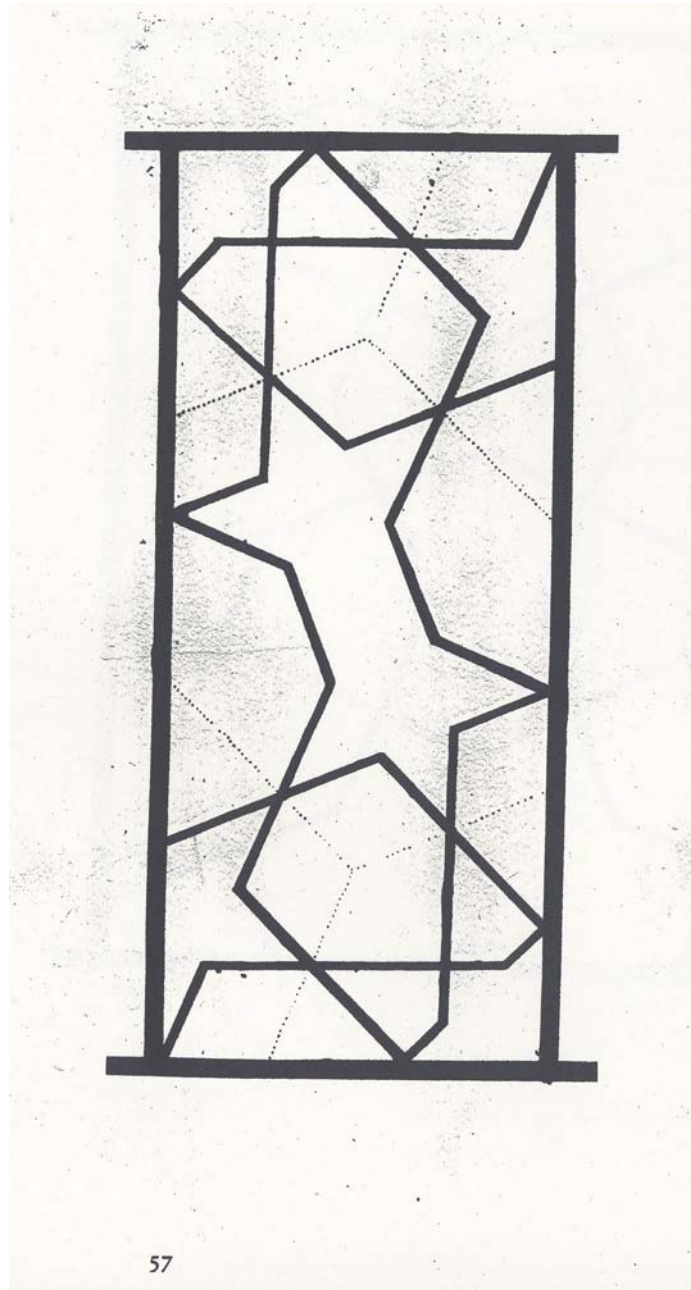
53

54

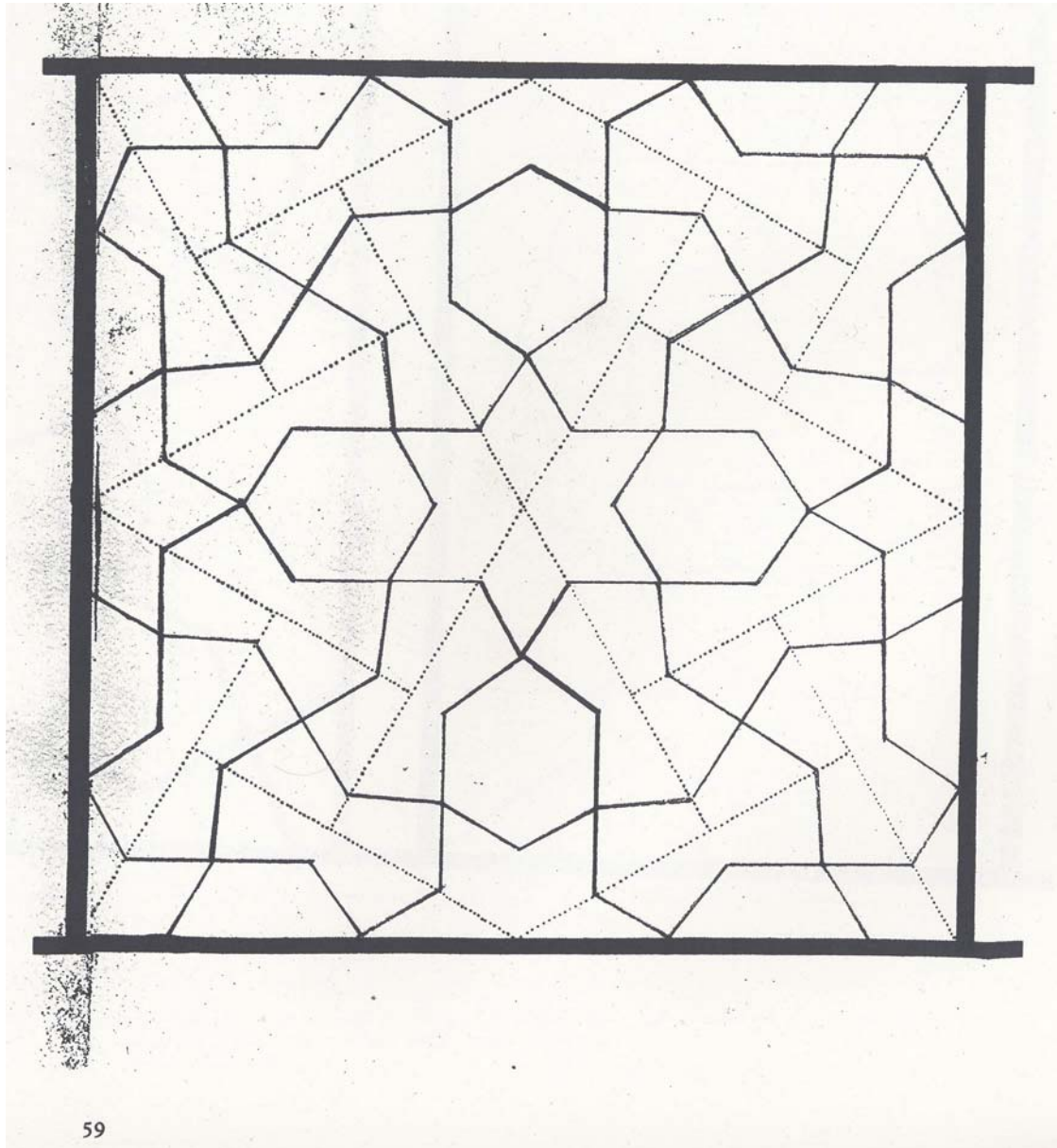
**Nummer 55**



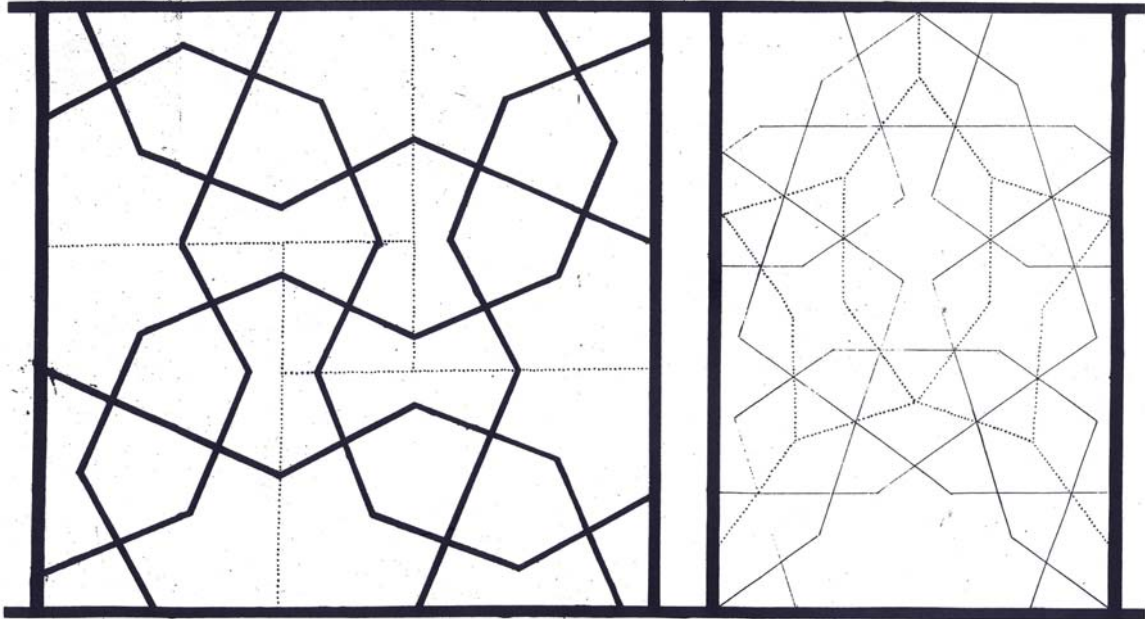
**Nummer 57**



**Nummer 59**



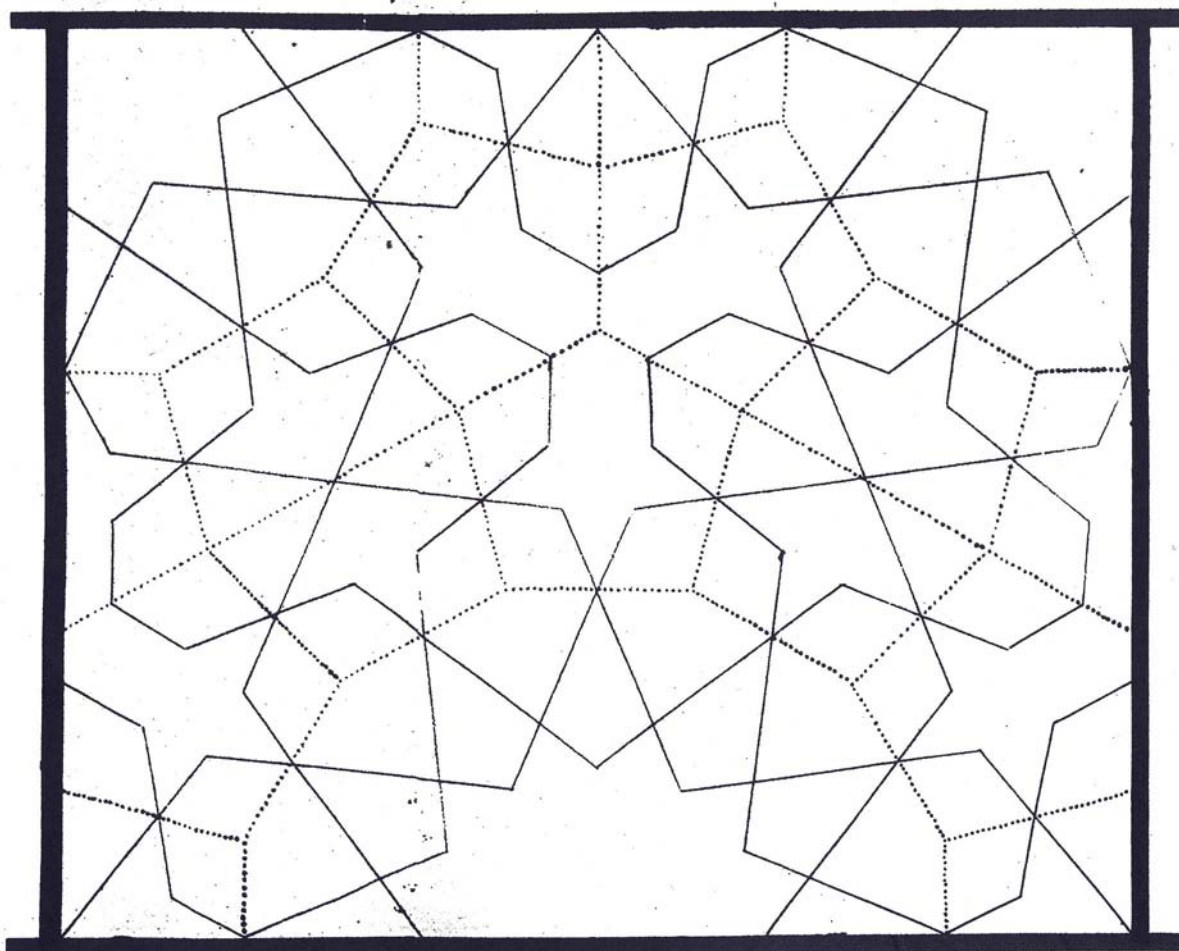
Nummer 61 en 62



61

62

# Nummer 63





**Nummer 64**

