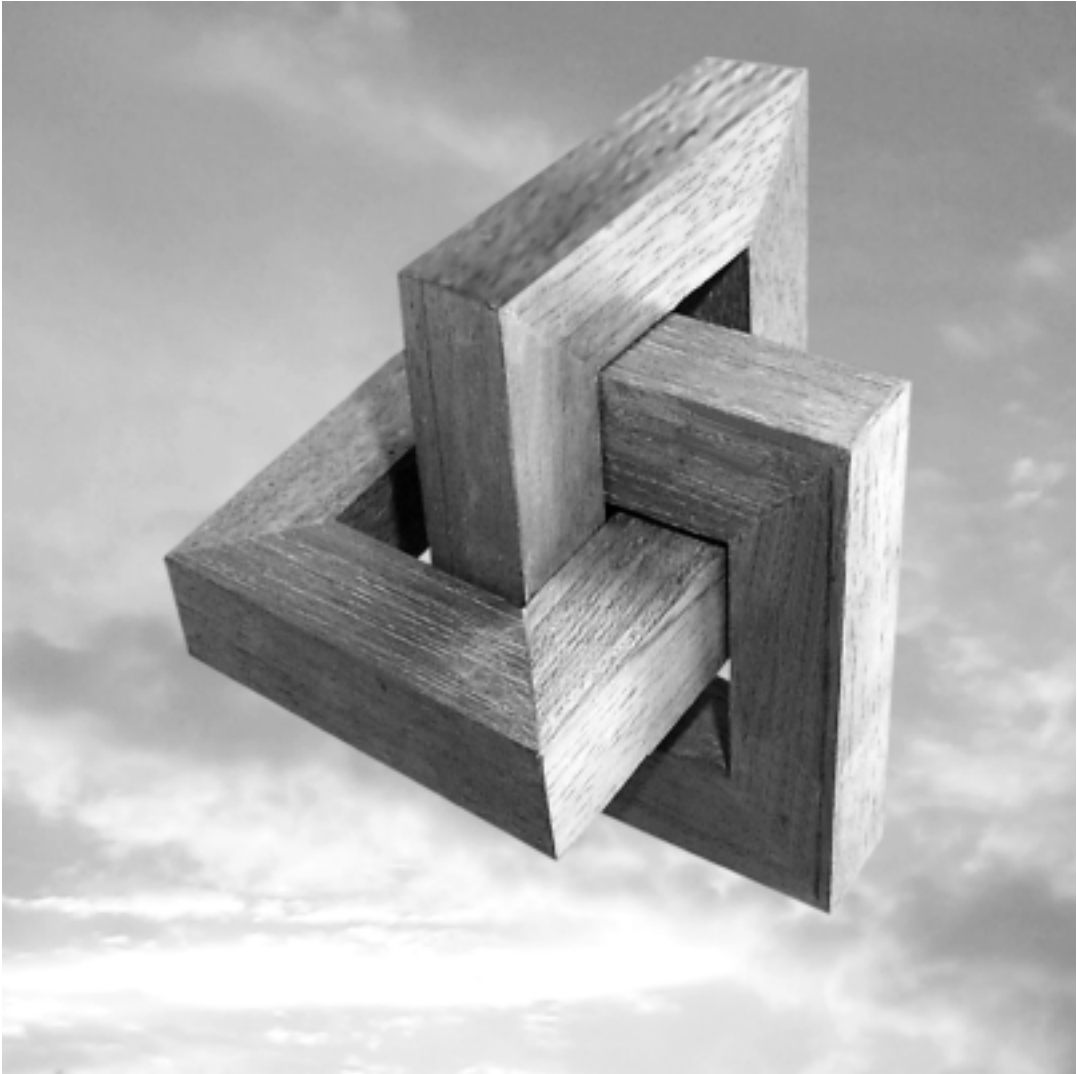


ARTHESIS

jaargang 17, nummer 1



een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis

inhoud

lustrum Ars et Mathesis	pag. 3
cirkels en sterren in een goddelijke komedie (2)	pag. 4
praktische zaken	pag. 15
logo met vaart	pag. 15
CWI-exposities	pag. 15
Maurits Escher en Gerard Mercator	pag. 16
Escher in het Paleis	pag. 17
nieuw boek over Escher	pag. 18
'order in Pollock's chaos'	pag. 18
veelvlakkenprijsvraag	pag. 18
donateursbijdrage	pag. 18
informatie Stichting Ars et Mathesis	pag. 19

>> zie pagina 19 voor de jaarlijkse betalingsoproep <<



jaargang 17 nummer 1 - januari 2003

Arthesis is een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis en wordt gratis toegezonden aan de donateurs van de Stichting. Losse nummers: • 3,50 (bestelwijze: zie kader op pag. 19).

omslag knoop Koos Verhoeff, montage Ineke Lambers

redactie Bart Heukelom
Rinus Roelofs
Ineke Lambers (vormgeving)

redactie-adres Bart Heukelom
Johannes van der Waalsstraat 38-I
1098 PM Amsterdam
email: b.heukelom@wxs.nl

inzenden kopij

Bij voorkeur in digitale vorm: tekst als WP- of Word-bestand; illustraties in de vorm van een goede foto of duidelijke tekening (indien mogelijk het origineel, liever geen scan of fotokopie), of digitaal aangemaakt (vectortekening in CDR of AI format; bitmaps als Jpeg of Tiff bestand en in voldoende hoge resolutie).

Iustrum Ars et Mathesis

'Bomen van Pythagoras, Geconstrueerde Groei': onder deze titel vindt in de tweede helft van 2003 een omvangrijk project plaats van *Het Mondriaanhuis, Museum voor Constructieve en Concrete Kunst* in Amersfoort, in samenwerking met Ars et Mathesis. Voor Ars et Mathesis valt dit samen met het vierde Iustrum. In dit kader zijn er twee tentoonstellingen, waarbij Ars et Mathesis actief aan de tweede deelneemt, en aanpalende activiteiten.

Nadruk ligt op kunstwerken waarin groeien, krimpen, seriële verandering en gebruik van elementaire wiskundige vormen van belang is. Diverse betrokken kunstenaars zien in hun werk bovendien nog een herkenbare verwantschap met natuurlijke ordeningsprincipes.

een overzicht van activiteiten:

* Van 21 juni tot 27 juli: Bomen van Pythagoras I, Geconstrueerde Groei.

'Historisch' werk van kunstenaars die onder invloed van Mondriaan en De Stijl werkten, maar die in tegenstelling tot Mondriaan zelf wel wiskunde toepasten; o.a. Marlow Moss, Joost Baljeu, Ad Dekkers, vroeg werk van Peter Struyken en Ewerdt Hilgerman.

* Van 31 mei tot 27 juli is er in het Mondriaanhuis bovendien werk te zien van de 80-jarige Alfons Kunen.

Kunen werkt vanuit vastomlijnde wiskundige regels die soms zeer zichtbaar zijn, maar meestal een verborgen leidraad vormen. De laatste jaren maakt Kunen schilderijen die op fractale structuren steunen.

* Van 6 september tot 22 november: Bomen van Pythagoras II, Geconstrueerde Groei. Grote tentoonstelling met ruim 35 concrete kunstenaars uit diverse Europese landen die Concrete Kunst maken. Er is permanent een speciale Ars et Mathesis-zaal, waarin ook computeranimaties te zien zijn.

* Een speciaal zomernummer van Arthesis, aansluitend bij de tentoonstelling.

* Een onderwijsproject gericht op basis- en voortgezet onderwijs, aansluitend bij de exposities.

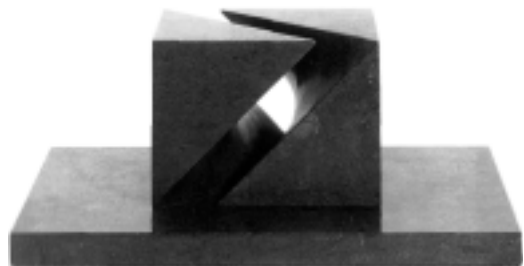
* In oktober 2003 een internationaal symposium in het Mondriaanhuis over het thema Concrete Kunst en Wiskunde: kunstenaars en deskundigen uit verschillende disciplines leveren een bijdrage.

* De Iustrumdag van Ars et Mathesis op 22 november zal een aan deze activiteiten aangepaste vorm en inhoud krijgen.

Te zijner tijd volgt verdere informatie; kijk ook met name op de website.

het bestuur

Alfons Kunen - kubus-sculptuur



cirkels en sterren in een goddelijke komedie

deel 2: de geometrie van de hel

vorige aflevering, vooruitblik

In de eerste aflevering van deze serie over wiskunde in Dante's Divina Commedia hebben we gezien hoe hoog de status is die Dante de wiskunde toekent. De wiskunde bevindt zich halverwege de gebrekkige menselijke kennis en de Goddelijke Wijsheid, minder is er niet van te maken.

We hebben ook gezien hoe Dante's wereldbeeld uitgaat van een centrale aardbol met de hemelse sferen daar om heen, het model van Ptolemaeus. We leerden uiteraard - zij het oppervlakkig - Beatrice kennen.

Drie rijken aan gene zijde van de dood gaan we nu met Dante bezoeken: Hel, Louteringsberg, Paradijs. Eerst dalen we af tot in het diepst van de Hel.

eerbetoon aan de Ouden, waaronder Euclides

Alleen omdat Vergilius, Dante's gids, zo overtuigend is in zijn betoog dat Dante vanuit de Hemel geleid wordt door het drietal hooggezegende vrouwen Maria, Lucia, Beatrice, durft de pelgrim Dante de poort van de Hel in te gaan, waarop vreeswekkend staat geschreven:

Er is geen hoop voor wie hier binnentreden.

[III, 9]

In Charon's scheepje wordt de rivier van de klassieke onderwereld overgestoken, de Acheron, omstuwd door de eindeloze stroom zie-

len van de verworpenen; in de 14e eeuw was het geen enkel probleem de klassieke mythologie te verweven met de verhalenschat die met het Katholieke geloof verbonden was.

In de eerste kring van de Hel, direct na de overtocht over de Acheron en als de afdaling nog niet echt is begonnen, ontmoeten we diegenen die in het geheel niet gezondigd hebben, maar helaas, helaas niet gedoopt zijn. Hun straf is 'slechts' het eeuwig hopeloze verlangen naar het Paradijs. Hier in de Limbus treft Dante de geleerden en filosofen uit de oudheid die hij hoogacht. Dante is verguld te mogen converseeren met zijn idolen Homerus, Horatius, Lucretius, Ovidius, en uiteraard zijn gids Vergilius. Hij wordt in de kring op genomen:

Als zesde in die groep zeer geleerden.

[IV, 102]

Met het eenvoudige telwoord 'zesde' plaatst Dante zich zonder opvallende borstklopperij maar toch zeer zelfbewust in de schare der zeer groten. Arrogantie? Misschien, maar Dante heeft wel gelijk gekregen. De kring der filosofen bevat ook louter excellenten:

Toen ik inmiddels hoger had gekeken,

Zag ik veel wijzen, Aristoteles

In 't midden, die hun meester is gebleken.

Ik zag ook Plato daar en Socrates

Die hem, vooraan, met groot respect aanschouwden,

En Heraclitus en Empedocles;

... ..

*Euclides, Ptolemaeus; en ook waren
Galenus en arts Avicenna daar;
Averroes, auteur der commentaren.*

[IV, 130-135, 142-144]

Voor Dante is Aristoteles als filosoof veel belangrijker dan Plato, vers 132 is daar bijzonder duidelijk over. De commentaren van Averroes: op de werken van Aristoteles. Euclides, dat is toch wel bijzonder voor de liefhebbers van de meetkunde, wordt hier bij name genoemd. Euclides bracht in zijn encyclopedische *'De Elementen'* de Griekse meetkunde en getaltheorie in één groot werk samen en Ptolemaeus deed soortgelijks voor de antieke (Griekse en Babylonische) sterrenkundige kennis met zijn *'Almagest'*. Het noemen van beide in één regel is veelbetekenend: de Griekse sterrenkunde is in hoge mate een uitbreiding van de meetkundige methode naar een ander onderzoeksgebied. Thales stond bekend als de eerste Griekse wijsgeer; aan hem wordt, behalve een serie meetkunde stellingen, ook toegeschreven de zonsverduistering van 585 voor Christus te hebben voorspeld.

Onwaarschijnlijk is dat Dante van al deze wijzen de werken in originele vorm gekend heeft. Een compilatie van klassieke fragmenten, de *'Livres dou Tresor'* van Dante's leermeester Brunetto Latini moet Dante's belangrijkste bron zijn geweest, al doen vele passages vermoeden dat dit absoluut niet de enige bron voor Dante's wetenschappelijke en astronomische kennis was. Dante noemt (in de *Convivio*) bijvoorbeeld ook nog een Arabische sterrenkundige uit de 9e eeuw, Alfraganus, vermoedelijk de verbinding met Ptolemaeus. Dante heeft overigens een ontroerende ontmoeting met deze Latini in de zevende kring van de hel, waar

onder andere de homoseksuelen hun plaats gegeven krijgen. Dat was in lijn met de officiële leer van de Katholieke Kerk van toen (en van thans), waar Dante zich niet openbaar tegen verzette, maar waarover hij zijn emoties wel laat zien.

de algemene vorm van de Hel

Na het verlaten van de Limbus beschrijft Dante de tocht aldus, en daar is de algemene geometrie van de Hel mee aangeduid:

*En ik werd verder naar omlaag geleid,
Ver van de stilte, naar een lucht die zindert,
En waar geen sprankje vuur nog licht verspreidt.*

.

*Wij kwamen bij de tweede kring en zagen
Dat hij een minder weidse omvang heeft,
Maar dat meer smart zich uit in luider klagen.*

[Hel IV, 149-151 en V, 1-3]

De Hel ligt in de duisternis onder het aardoppervlak en bestaat uit negen cirkelvormige delen, de kringen. De kringen liggen binnen elkaar en naar binnen toe komen we steeds lager. Het laagste punt is tegelijk het midden van de aarde.

In elke kring wordt voor een bepaald type zonde eeuwig geboet volgens de regel van de contrapasso: de straf heeft een relatie met de begane zonde. Zo worden degenen die zich hebben laten meeslepen door hun hartstochten gestraft doordat ze voor eeuwig meegesleurd worden door een immer ziedende storm; en de waarzeggers die meenden in de toekomst te kunnen zien, lopen voortaan met hun hoofd een halve slag gedraaid achterwaarts.

De Hel is één lange uitdaging voor de illustra-



figuur 1: Codex Altonensis, 14e eeuw

toren, wat de gruwelijkheid der martelingen betreft op de eerste plaats, maar niet minder wat betreft het belichten van de ruimtelijke structuur.

In een van de oudste illustraties, in de 14e eeuwse Codex Altonensis, ligt de nadruk al op de concentrische kringen (zie fig. 1). Linksboven gaan Dante en Vergilius de Hel in, rechtsonder zien we ze aan de andere kant van de aarde terug op de top van de Louteringsberg; op weg naar de hemelse sferen, die daar nog net zijn aangeduid. Het totaalplan van de reis is dus wel afgebeeld, al zal de lezer die niet gewend is aan de vormtaal van middeleeuwse afbeeldingen licht de verkeerde conclusie trekken dat de cirkels van de Hel in de volgorde één tot en met negen overgestoken

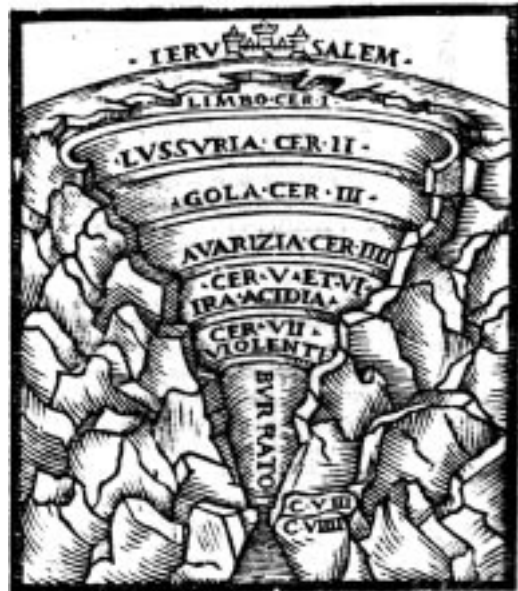
worden naar het midden en later weer van negen tot en met één naar buiten terug. Straks zullen we zien hoe de Hel werkelijk verlaten wordt.

De hemelse sferen omhullen bovendien in Dante's verhaal de aarde, waar de Hel in ligt, al lijkt dat in onze ogen hier misschien niet zo.

Pierfrancesco Giambullari toont ons in 1544 het inwendige van de aarde met de hel als een ruwweg kegelvormige holle ruimte, zie fig. 2. De cirkels (Cer. I, Cer. II, etc.) zijn galerijen op de kegelwand, nemen tot aan de zevende geleidelijk in grootte af en liggen steeds dieper. Dan volgt de Burrato, de afgrond met daaronder de achtste en negende kring.

Een meer gedetailleerd overzicht biedt fig. 3, van Bernardo Daniello da Lucca, 1568. We zien een kegelvormig deel, met twee cilindervormige delen eronder. De achtste kring is hier onderverdeeld in tien kleine cirkels. Lucca is dui-

figuur 2: Giambullari, 1544



delijk geen ervaringsdeskundige wat de richting van de vrije val in deze contreien betreft. Dante wel, die wist dat alle lijnen die naar beneden gaan in de richting waarin dingen vallen, in het middelpunt van de aarde bij elkaar komen; dat zullen we zo dadelijk nog zien.

Onder de zevende kring van de gewelddadigen (*violenti*) gaat het in ieder geval steil naar beneden. Vergilius geeft hier door een koord naar beneden te laten uithangen een signaal, waarop de vliegende draak Gerion verschijnt. Op diens rug wordt de afdaling gemaakt. De derde dimensie, die van diepte en hoogte, is nu ijzingwekkend voelbaar aanwezig:

*Het bleef in kringen naar beneden glijden
Alsof het zwom; ik voelde enkel wind
In mijn gezicht vanaf de onderzijde.*

[Hel, XVII, 115-117]

De reizigers zijn banger dan Icarus en Phaëton, bekende ongelukspiloten uit de oudheid. Veiligheid geeft de vergelijking met de jachtvalk; maar hoe al die gekwelde zondaars zich langs de steile wand staande houden, dat maken Dante en Lucca beiden niet duidelijk:

*Dalend in kringen zag ik langs de wand
Wat eerst verborgen was: zoveel torturen
Die op mij af kwamen van elke kant.*

*Zoals de valk die na een jacht van uren
Geen lokdier zag, geen prooi te pakken kreeg
(De valkenier is bitter om die kuren,*

*Als hij loom dalen ziet wie zo snel steeg),
En die ver van zijn baas na honderd ronden
Nukkig en ontevreden nederzeeg,*



figuur 3: Bernardo Daniello da Lucca, 1568

Zo bracht het beest ons waar wij landen konden.
[Hel, XVII, 124-133]

de maten van de Malebolge

We staan nu bij de achtste kring, bijgenaamd de Malebolge, de Kloven van Het Kwaad. Deze kring is in tien ronde concentrisch kloven onderverdeeld.

Uit de veelheid van gruwelijk-schitterende details onderweg neem ik ter onderbreking een afwijkend stukje meetkunde op.

In de topologie leren we dat een theekopje met oor door continu vervormen in een donutvorm kan overgaan. Dat is een kleinigheid vergeleken met de slang en de zondaar (de schim

in de tekst) die geleidelijk hun vormen verruilen:

*De slangenstaart spleet in een vork uiteen,
Terwijl de voeten van de schim zich paarden;*

*En ook het linker- en het rechterbeen
Vergleden in elkaar, waarvan geen sporen
Resterden, omdat heel hun vorm verdween.*

*Maar alles wat de zondaar had verloren,
Ontsproot weer bij de slang. Haar huid werd glad,
Die van de ander grover dan tevoren.*

*Zijn armen krompen in het okselgat,
En bij de slang groeiden terzelfder tijde
Poten tot armen uit, die zij nooit had.*

*De achterpoten die zich samenvlijden,
Werden het lid dat elke man bekleedt,
Terwijl zijn lid zich in twee poten scheidde.*

[Hel, XXV, 104-120]

Over de kloven van de Malebolge liggen bruggen. Botticelli, één van de nauwkeurigste illustratoren van de Commedia, laat duidelijk zien dat de bruggen een hoge en een lage kant hebben; zie fig. 4. Dat klopt met de tekst van Dante:

*Omdat in deze afgrond het gebied
Der Kloven van het Kwaad almaar blijft dalen,
Ligt bij iedere diepte die je ziet*

De overzij wat lager.

[Hel XXIV, 37-40]

Botticelli's tekening geeft verschillende momenten tegelijk. Dante en Vergilius zijn drie keer te zien: eerst klimmend uit de zevende kloof; dan op de richel tussen de zevende en

de achtste kloof; tenslotte op de brug van de achtste kloof, kijkend naar de vlammen, waar-tussen zich Ulysses moet bevinden, met wie Dante een boeiende gesprek heeft.

Bij de negende en tiende kloof geeft Dante bij uitzondering exacte maten:

*Mijn leidsman zei: 'Wat treft je hier zozeer?
Waarom staar je nog steeds naar die gewonden,
Dit jammerlijk verminkte schimmenheir?*

*Zo heb ik je tevoren nooit bevonden.
Tel toch hun aantal niet; de omloop moet
Ruim twintig mijlen zijn op deze ronde.*

[Hel, XXIX, 4-9]

*Ach, zat er in mijn lijf nog zoveel leven
Dat ik één duim kon gaan in honderd jaar,
Dan had ik mij allang op weg begeven.*

*Dan zocht ik hem in de misvormde schaar,
Al is de kloof elf mijlen in het ronde,
En breed een halve, nog vond ik hem daar!*

[Hel, XXX, 82-87]

Op grond van deze tekstfragmenten kunnen we een kleine berekening maken. Dante zegt in XXIX, 4-9 letterlijk: *miglia ventidue*. Tweëntwintig mijl dus, het dubbele van de tiende kloof. Nemen we nu aan dat alle kloven even breed zijn, dan vinden we voor de hele Malebolge een diameter van 10 maal de diameter van de kleinste gracht. Dus $10 \times 11/\pi$ mijl, ongeveer 35 mijl.

Een merkwaardige tegenstrijdigheid met Botticelli doet zich nu voor. Want volgens de berekening moet elke kloof dan toch wel zo'n 1.75 mijl breed zijn, van dijk tot dijk. Dat zie je aan de tekening toch bepaald niet af!



figuur 4: Botticelli, rond 1490 (detail)

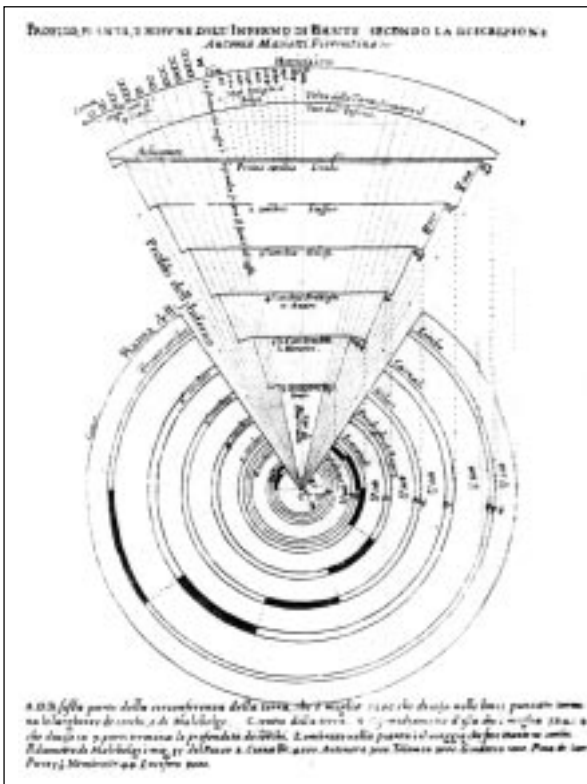
de geometrische hel van Manetti en Manzani
Exact georiënteerde lezers uit het verleden, waaronder Brunelleschi (1377- 1446, architect van de koepel van de Dom van Florence en mogelijk uitvinder van de techniek van het perspectief) en Alexandro Manetti (1423-1497, eerste biograaf van Brunelleschi), besteedden veel tijd aan het in schaal en maat onderbrengen van dit toekomstland van de zondaar. Manetti berekent maten bij alle krin-

gen, zowel in breedte als diepte; zijn Malebolge is, uiteraard, 35 mijl in doorsnede.

Een extreem voorbeeld van de geometrisering van de Hel vinden we in een gravure van Domenico Manzani uit 1595 (zie fig. 5) die zo ontsnapt kan zijn uit een handboek *Beschrijvende Meetkunde* uit de 19e eeuw, waar soms ook forten in werden afgebeeld met de projectietechniek van Gaspard Monge. De Hel is hier globaal als een omgekeerde kegel afgebeeld in

boven- en zij-aanzicht. De Hel wordt voorgesteld als een serie kegelsegmenten waarvan de top in het middelpunt van de aarde ligt; de opeenvolgende verdiepingen horen bij kegels met steeds kleinere tophoek, waardoor de galerijen ontstaan. Hulplijnen geven de verbanden tussen de twee aanzichten aan. De tekening volgt exact de maatvoering van Antonio Manetti, die ook bovenaan vermeld wordt. De Hel bevindt zich hier globaal in een kegel met tophoek van 60°; dit is gebaseerd op het feit dat de hel onder Jeruzalem moet liggen en dat de ingang verondersteld werd bij Cuma in Italië te liggen. Bij Cuma ging Aeneas, hoofd-

figuur 5: Manzani, 1595; naar Manetti



persoon van Vergilius' Aeneis, de onderwereld binnen en ook hier volgt Dante zijn leermeester, zo is de gedachte.

De diepte van de Hel is bij Manetti gelijk aan de straal van de aarde en aan de straal van de eerste kring van de hel: $3245 \frac{5}{11}$ mijl; aan de lezer om, middels het gegeven dat een mijl duizend dubbelpassen omvat, te zien hoe goed die maat is. Manetti geeft nog 3400 mijl voor de doorsnede van de hel, gemeten langs het aardoppervlak, dat is dus $\frac{1}{3}$ deel van de omtrek van de aarde. Dat klopt mooi, de verhouding tussen de twee maten moet die van de omtrek van een cirkel en een ingeschreven zeshoek zijn. Zo iets kan aan Manetti, de wiskundige, worden overgelaten:

$$\frac{3400}{(3245 \frac{5}{11})} \approx 1,047 \approx \frac{\pi}{3}$$

De Burrato Di Gerione is volgens Manetti 730 en $\frac{1}{22}$ mijl diep, de afdaling moet inderdaad huiveringwekkend geweest zijn.

Overzichtelijk is Manzani's tekening zeker, maar ook fysisch veel interessanter dan die van Lucca. Manzani heeft wél begrepen dat de steile wanden in zijn tekeningen overal in werkelijkheid loodrecht zijn, kijk maar hoe de omlopen getekend zijn, de eigenlijke kringen van de hel waar de zondaren zich bevinden. Zo'n kring bevindt zich in Manzani's voorstelling dus op een denkbeeldige bol die op het juiste niveau ligt tussen het middelpunt en het buitenoppervlak van de aarde.

In de Commedia-tekst wordt echter bepaald niet over loodrechte afdalingen gesproken. Een steil pad, afdalen langs treden, een pad stroomafwaarts volgen, er is nogal wat variatie. Zie de al eerder geciteerde overgang naar de tweede kring (in Hel, V, 1-3). Het 'de overzij wat la-

ger' in Hel XXIV, 41 roept ook niet direct Manzanianaanse hoogtevrees op!

de Geketende Reuzen in de Put

Beneden de Malebolge huizen de reuzen, deze staan voor de helft in een diepe put. Het lijkt erop dat de reuzen niet op grond van hun zonden maar op grond van hun afmetingen bij elkaar zijn geplaatst, zoals in mijn boekenkast de romans, wiskundeboeken, poëziebundels naar soort hun eigen plek hebben, terwijl de buitenformaat boeken van allerlei gezindten een hoge plank moeten delen.

Dante geeft details over maten en verhoudingen van de reus Nimrod:

*Zijn hoofd was even groot, heb ik bedacht,
Als Petrus' bronzen pijnappel te Rome,
De rest was evenredig, naar verwacht,*

*Zodat de wand die hem tot het abdomen
Verborg, nog zoveel van hem zichtbaar liet
Van boven dat, om tot zijn haar te komen,*

*Drie Friezen, op elkaar geklommen, niet
Hadden volstaan, want hij mat zestig palmen
Tot waar men bij de mens de halsspeld ziet.*

[Hel XXX, 58-66]

De bewuste pijnappel¹⁾ meet $5\frac{1}{2}$ braccia²⁾ volgens Manetti, de gigant is dan dus $14\frac{2}{3}$ keer zo groot als een mens, uitgaande van een hoofd-lichaamslengte verhouding van 1 : 8 en 3 brachia voor een normale lichaamslengte. Nimrod is dan ruim 26 meter. Nu heeft Dante net iets eerder, bij het zien van de half boven hun putwand uitstekende reuzen, moeten denken aan een beroemd vestingstadje ten Noorden van Siena:

*Zoals Monteregioni is omrand
Met torens, door de vestingwal gedragen,
Zo torenden langs deze stenen wand*

*Giganten die wij tot het middel zagen,
Zo vreselijk dat Jupiter hen daar
Met bliksem uit de hemel blijft belagen.*

[Hel XXXI, 40-45]

Wie er geweest is weet dat het een adequaat beeld is, ook wat grootteverhouding betreft. De Italiaanse tekst van Hel XXX, 65 heeft *trenta gran palmi*. Dertig gespreide handen, dus zo'n 6 meter - inderdaad ruim drie Friezen - van navel tot halsspeld. Deze berekening geeft Nimrod toch wel een buitenproportioneel grote kop, dat mag de lezer zelf na gaan. Misschien is dit dan zijn 'contrapasso': Nimrod was de architect van de toren van Babylon en wordt met buitenproportionaaliteit gestraft, de nachtmerrie voor elke architect. Overigens is in Genesis X-XI alleen te vinden dat Nimrod een geweldig jager was, maar er staat niets over zijn reusachtigheid.

Vergilius en Dante worden door de wat vriendelijker reus Antaeus in de negende kring van de Hel neergezet, de bevroren rivier de Cocytus. Voor Antaeus is dat slechts oppakken en neerbuigen, meer niet, en dat is bij deze reuzen volgens de voorgaande berekening bij lange na geen $81\frac{3}{22}$ mijl, die Manetti aan de diepte van de put der reuzen toekent.

In het diepst van de Hel treffen we Lucifer, aanvoerder van de gevallen Engelen. Vast in het ijs, en eeuwig met zijn drie monden kauwend op de verraders Judas, Brutus en Cassius. Zie ook het midden van fig. 1. De lengte van Lucifer is weer uit de tekst berekenbaar en deze keer suggereert Dante de lezer zelf de berekening uit te voeren:

*De hellevorst scheen met zijn borst ontsproten
Aan 't ijsveld. Ik stem meer nog overeen
Met de giganten, als het gaat om grootte,*

*Dan een gigant met Satans arm alleen.
Door deze vergelijking kunt u weten
Hoe onafzienbaar groot de Boze scheen.*

[Hel XXXIV, 28-33]

Een gigant is dus middenevenredig tussen een mens en Satans arm: mens staat tot Gigant als Gigant tot Satans arm. Voor Satan zelf komen we (met Manetti, zie onderaan fig. 5) op een Lucifer van 2000 braccia hoog. De maten van de reuzen, van Lucifer en van de kringen van de Hel variëren natuurlijk per commentator en illustrator. Het blijft tobben, daar diep in de Hel, de juiste maat wordt er zeker niet aangehouden.

hier is het ware middelpunt van het heelal
Langs de vacht van Lucifer klimt Vergilius omlaag, met Dante op zijn rug. Maar wat betekent hier nog 'omlaag'? Vergilius doet vreemde dingen:

*Toen wij ter hoogte van de heupgewrichten
Een dijbeen volgden, bracht mijn gids stilaan,
Door niet voor moeite en voor pijn te zwichten,*

*Zijn hoofd waar hij zijn voeten eerst had staan;
Hij greep zich vast als iemand die wil stijgen.
Zodat ik dacht de hel weer in te gaan.*

[Hel XXXIV, 76-81]

Vergilius gaat echter doelgericht te werk; Botticelli laat weer zien wat aan de hand is, door Dante en Vergilius meermalen uit te beelden op klimpartij: zie fig. 6³). Als de rust is weer-gekeerd geeft hij nog een snelle aanwijzing en

dan vraagt de leergierige pelgrim wat er allemaal aan de hand is. Vergilius geeft heldere uitleg:

*Mijn meester zei: 'Ga staan, gebruik je voeten.
Ons pad is lang en ver van ideaal;
Reeds kwam de zon de morgenstond begroeten.'*

*Het was bepaald geen vorstelijke zaal,
Eerder een soort spelonk, waar wij nu waren,
Amper verlicht, de bodem niet egaal.*

*'Wil, voor ik uit de afgrond op mag varen,
Meester,' zei ik, toen ik weer was gaan staan,
'Mijn grote misvatting voor mij verklaren.*

*Waar is het ijs? Hoe kreeg hij het gedaan
Dat wij hem andersom zien? Kon ten tijde
Van de zonsondergang de zon opgaan?'*

*Hij zei: 'Je bent niet meer aan gene zijde
Van 't middelpunt, waar ik mij langs het haar
Van deze kwade aardworm neer liet glijden.*

*Zolang ik nog omlaag ging, was je daar.
Maar toen ik keerde, kon je 't punt passeren
Dat alles wat gewicht heeft aantrekt. Maar:*

*Nu zul je in de hemisfeer verkeren,
Tegengesteld aan waar zich land bevindt
Onder welks zenit men de dood des Heren*

*Voltrok, die schuldloos alle schuld ontbindt.
Je hebt een cirkelvlak onder je voeten,
Keerzij van Judas' kring, en hier begint*

*De dag als men daar juist de nacht begroette.
Hij langs wiens vacht wij daalden: immermeer
Blijft hij hier in het ijs gekluisterd boeten.*

[Hel XXXIV, 94-120]

figuur 6 - Lucifer volgens Botticelli



Vergilius en Dante klommen langs Lucifer, die zich in het middelpunt van de aarde bevindt. Op zeker moment is dat middelpunt gepasseerd en dan is alles omgekeerd. De richting van de zwaartekracht: die richt zich namelijk overal naar het midden van de wereld, zie vers 111.

Maar ook de tijdsaanduiding morgenstond verbaast Dante. Wie het verhaal volgde weet dat Dante in de namiddag van paaszaterdag de Cocytus bezoekt, maar na het passeren van het middelpunt is het ineens paasochtend, twaalf uur later.

Jules Vernes heeft een complete roman nodig om Phileas Fogg en Jean Passepartout één dag te laten winnen; Dante doet iets dergelijks in enkele verzen, maar deze reis gaat dan ook niet in tachtig dagen om de wereld, maar in pakweg twee dagen er dwars door heen.

naar de sterren

Vanaf dit punt in de Divina Commedia, waar het middelpunt van het heelal bereikt is, komen steeds meer verwijzingen naar de sterrenkunde voor. Dante begint de rode draad van de sterrenkunde, één van de vele lijnen in de Commedia, dus letterlijk in het midden van het heelal.

Na het passeren van het middelpunt van het heelal verloopt de terugtocht naar het aardoppervlak heel snel, in minder dan twintig verzen, via een geheim pad dat direct omhoog leidt en juist bij het tegenpunt van Jeruzalem het aardoppervlak bereikt.

De laatste regel van *de Hel*:

Daarboven zagen wij de sterren weer.

[Hel XXXIV, 139]

Een opluchting, de Hel met zijn kwellingen van kokende pek, vuur, woeste stormen en ijs is gepasseerd. Er is weer uitzicht, weer hoop. Dat mag zo lijken, het klopt alleen niet, nu Vergilius aangekondigd heeft dat de zon juist opgaat en de sterren dus niet meer zichtbaar zullen zijn.

Zou Dante geloofd hebben dat men naar boven kijkend vanuit een diepe put toch overdag boven zich sterren kan zien? Dat verhaal is namelijk oud; Minnaert (van *Natuurkunde in het vrije veld*) zegt dat het al uit Aristoteles' tijd is. Er zijn echter nooit dergelijke waarnemingen vastgesteld, het is niet meer dan een legende. Misschien klopt het zien van de sterren wel, maar dan op een ander niveau. In de twee volgende cantica's, Louteringsberg en Paradijs, worden de sterren ook in de slotregels genoemd, dat is vast geen toeval

Bij de openingsverzen van de Commedia wees ik al op de allegorische betekenis; Dante zelf onderscheidt in de Convivio en in een opdrachtbrief aan zijn Milanese beschermer Can Grande Della Scale in totaal vier betekenislagen:

- de letterlijke (de feiten die genoemd worden);
- de allegorische (de waarheid die zich onder de schone leugen verschuilt);
- de morele (de betekenis die de lezer ten bate van zichzelf moet ontdekken);
- de anagogische (uitstijgend boven het zintuiglijke en verwijzend naar de verhevenheid van de eeuwige glorie).

In de drie slotregels waar de 'sterren' in voorkomen, daar overheerst de laatste betekenis. Ze vatten de tocht van diepste zonde naar het allerhoogste pregnant samen.

voorblik

In de volgende aflevering bezoeken we onze tegenvoeters op de Louteringsberg; die bevindt zich recht tegenover Jeruzalem op het Zuidelijk halfroond.

In de laatste aflevering gaan we langs maan, zon, planeten en sterren naar nog hoger. Dat zijn de sferen die bij Dante tegelijk de astronomische en de hemelse sferen zijn. Daar realiseert Dante uiteindelijk zijn visioen, dat hij aan het eind mengt met een heel bijzonder wiskundig beeld.

Aad Goddijn

praktische zaken

* Het adres van Ineke Lambers (voor aanmeldingen, adreswijzigingen en bestellingen) is in 2002 gewijzigd: zie het kader op pagina 19. Gebruik s.v.p. dit nieuwe adres. *Vergeet bij verhuizing niet Uw nieuwe adres door te geven!*

* Herhaald verzoek: beschikt U over een **email-adres**, geef dat dan door met een miltje aan ilambers@wxs.nl, met als onderwerp 'adres AM' en in het bericht naam en woonplaats.

* Aan de te bestellen Ars et Mathesisproducten is toegevoegd het **kwartet "orde-chaos"** dat op de Ars et Mathesisdag 2002 is gepresenteerd. Vier kleurrijke kaarten, op zwaar papier, met recent werk van **Monika Buch**; zie pagina 19!

CWI exposities

Tot begin februari 2003 zijn in de Ars et Mathesis vitrine in het Amsterdamse CWI nog 'space filling stars' van Jan Smit te zien. Daarna is er een expositie van het werk van Monika Buch te bewonderen.

noten

1. Deze bevond zich in Dante's tijd op het plein voor de Sint Pieter, nu in de tuinen van het Vaticaan.

2. Een el, of armlengte. Ongeveer 60 cm.

3. De 'vouw' in de afbeelding van Lucifer was er in 1490 al. Die tekening is uit twee losse vellen perkament samengesteld; kunsthistorici weten niet goed waarom maar het past wonderwel bij XXXIV, 116. De vouw zou het evenaarvlak van de aarde kunnen voorstellen.

logo met vaart

In vorige nummers van Arthesis waren al voorbeelden te zien van onmogelijke figuren in bedrijfslogo's, zoals wiskundedocent Joop van der Vaart die signaleerde en fotografeerde. Hieronder het derde plaatje in deze korte reeks van onverwachte 'wiskunst' in het leven van alledag. We herhalen nog eens de oproep om zelf naar zulke uitingen te speuren en een foto van wat u tegen komt aan de Arthesis-redactie te sturen als bijdrage voor een nieuwe reeks.



Maurits Escher en Gerard Mercator

Het is merkwaardig dat zowel Escher (de kunstenaar) als Mercator (de cartograaf) zich - vanuit geheel verschillend gezichtspunt en met geheel verschillende doelstelling - met hetzelfde wiskundige onderwerp bezighielden. Laten we beginnen met Mercator (1512-1594).

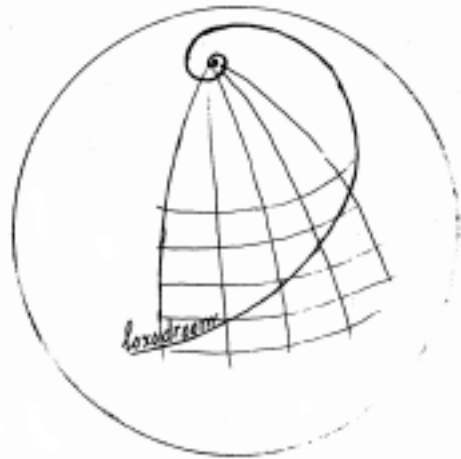
De kortste afstand van twee punten op een globe is een deel van een grootcirkel. Voorbeelden van grootcirkels zijn de evenaar en de meridianen, maar er zijn natuurlijk eindelijk veel grootcirkels op de bol die in andere richtingen lopen. Voor zeelieden is het niet mogelijk om over zo'n willekeurige grootcirkel te varen, omdat daarbij de kompascoers steeds verandert. Als hij een vaste koers wil aanhouden om van A naar B te komen, moet de zeeman over een zogenaamde loxodroom varen. Zo'n loxodroom (uit het Grieks: scheeflopen) maakt steeds dezelfde hoek met de meridianen (figuur 1) en een loxodroom is voor niet al te grote afstanden niet zo'n grote omweg. Zeelui hadden dus behoefte aan globes en kaarten



figuur 1

waarop loxodromen waren ingetekend. De eerste globe waarop loxodromen waren aangegeven werd in 1541 door Mercator gemaakt voor de kanselier van Karel V (later, in 1569 vond Mercator een kaartprojectie waarop loxodromen als rechte lijnen getekend konden worden). Als we zo'n loxodroom over de hele bol volgen blijkt deze in een spiraal naar de polen te draaien in steeds nauwere windingen zonder de pool ooit te bereiken (figuur 2).

figuur 2



Nu komen we bij Escher (1898-1972). In zijn kleurenhoutsnede *Boloppervlak Met Vissen*, die in juli 1958 klaar kwam (figuur 3) heeft Escher zijn vissen over loxodromen laten zwemmen. Elke loxodroom maakt een hoek van ca 60 graden met de meridianen. De bedoeling van deze prent was het afbeelden van een oneindig aantal lichte en donkere vissen, die steeds kleiner wordend naar de polen zwemmen.



figuur 3

Alle werk van M.C. Escher © Cordon Art - Baarn. Alle rechten voorbehouden.



figuur 4

Escher vond de loxodromen zo interessant, dat hij na het voltooiën van deze prent een andere maakte, *Bolspiralen*, die in oktober van hetzelfde jaar klaar kwam (figuur 4). Deze houtsnede is abstracter en had ook een andere bedoeling. De prent behoort tot de groep waarin Escher zowel de voor- als de achterkant van een voorwerp (hier een bol) wilde afbeelden. We zien dan ook hoe de loxodromen (hier als brede banden) zowel naar de noordpool als naar de zuidpool spiralen. Dat laatste bleef in de eerstgenoemde prent onzichtbaar. Op het eerste gezicht is het niet zo'n bijzonder interessante prent. Toch is het niet alleen qua voorstelling, maar zeker ook als staaltje van vakmanschap buitengewoon knap werk.

Het spel van meridianen en breedtecirkels op voor-en achterkant van de bol is subliem en ingewikkeld. Men kan er lang naar kijken en ontdekken hoe Escher het netwerk van meridianen en breedtecirkels, zowel voor als achter, samen heeft laten vallen. Bedenk ook dat het hier om een houtsnede gaat waarbij de uiterst fijne zwarte lijntjes zo nauwkeurig en perfect weergegeven zijn, dat ze gegraveerd lijken. Bij nadere bestudering komen steeds dingen te voorschijn die tonen hoe uiterst doordacht deze eenvoudig ogende prent is. En... van loxodromen had Escher zoals hij het zelf uitdrukte: "geen kaas gegeten. Ik heb er zelfs nooit iets over gehoord af gelezen."

Hans de Rijk

Escher in het Paleis

Het Paleis Lange Voorhout in Den Haag biedt sinds half november onderdak aan een nieuw museum dat geheel gewijd is aan het werk van M.C. Escher: Escher in het Paleis. Zie de link op de Ars et Mathesis website. Het museum is geopend van 11.00 uur tot 17.00 uur; 's maandags gesloten.

nieuw boek over Escher

In 1998 is op veel manieren aandacht besteed aan het feit dat M.C. Escher 100 jaar eerder werd geboren, o.a. met een internationaal congres in juni van dat jaar in Rome en Ravello. De vele interessante bijdragen aan dat congres zijn nu gebundeld en uitgegeven als boek met CD-rom, onder de titel *M.C. Escher's Legacy - A Centennial Celebration*. De redactie van het boek was in handen van Doris Schattschneider en Michele Emmer. Het bevat o.a. bijdragen van ook bij Ars et Mathesis bekende auteurs (zoals Bruno Ernst, Mark Veldhuysen, Jos de Mey, Peter Raedschelders en Rinus Roelofs). Uitgever: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. ISBN 3-540-42458.

veelvlakkenprijsvraag

Het wiskundetijdschrift voor jongeren *Pythagoras* organiseert in samenwerking met Ars et Mathesis een prijsvraag met als opdracht: *Kies een veelvlak en maak een model waarin je laat uitkomen hoe bijzonder het veelvlak is. Maak het model van hout, papier, steen, ijzerdraad, gips of van een ander duurzaam materiaal. Het model mag beweegbaar zijn. Ook mag je model virtueel zijn (een computeranimatie)*. Er zijn vier deelname categorieën (t/m 15 jaar, ouder dan 15 jaar, klasseninzending, computeranimatie van max, 2 min.) met voor elk een prijs van 500 euro, en een extra prijs van 500 euro voor de allerbeste inzending. Inzendtermijn tussen 15 april en 15 juni 2003. Kijk voor meer informatie en wijze van inschrijven (vanaf februari 2003) in *Pythagoras* of op de Ars et Mathesis website www.arsetmathesis.nl.

'order in Pollock's chaos'

Onder deze titel staat een artikel over Pollock in het decembernummer van het tijdschrift *Scientific American*. Richard P. Taylor onderzocht een aantal van Pollock's 'drip and swirl' schilderijen en ontdekte de fractale aspecten ervan. Geen regelmatige en ordelijke fractals, maar fractals die sterk samenhangen met het verschijnsel chaos. Taylor vergelijkt met een drip-painting van hemzelf en merkt forse verschillen op in de fractale dimensie. Vijf schilderijen waarvan vermoed werd dat ze van Pollock waren, vallen vanwege hun te lage fractale dimensie nu door de mand! Fascinerend, schitterend toegelicht en geïllustreerd met grafieken en uitvergroete details. Aanbevolen.

> > donateursbijdrage < <

Eerder in het jaar dan U gewend bent **een oproep aan alle donateurs om de donateursbijdrage voor 2003 over te maken**. Juist in dit lustrumjaar is tijdig zicht op de financiële positie van onze Stichting gewenst, terwijl betaling vroeger in het jaar ook een logischer laten samenvallen van betalingsjaar en kalenderjaar mogelijk maakt. Wellicht inspireert het lustrum U zelfs tot het voor dit keer overmaken van een wat hogere donatie dan het minimumbedrag van 15 euro. Mocht U uw **donatie voor 2002** nog niet hebben betaald, dan verzoeken we U dringend ook die alsnog over te maken. Zie voor de wijze van betalen verder het informatiekader op pag. 19. Gaarne eigen naam en adres duidelijk vermelden, plus het jaar/de jaren waarvoor U betaalt (2002 en/of 2003).



De Stichting ARS ET MATHESIS (opgericht in 1983) heeft tot doel de belangstelling te bevorderen voor kunst die zijn inspiratie vindt in de wiskunde. Dit gebeurt onder meer door tentoonstellingen, publicatie van boeken en artikelen, het uitgeven van het blad 'ARTHESIS' en het organiseren van een jaarlijkse ARS ET MATHESISdag (diverse voordrachten gecombineerd met een dag-expositie waar werk van velerlei exposanten is te bekijken).

donateurs: Donateurs (minimum donatie • 15,- per jaar) ontvangen Arthesis en hebben gratis of tegen gereduceerd tarief toegang tot de jaarlijkse Ars et Mathesisdag. Bijdragen kunnen worden overgemaakt op bankrekening nummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn; s.v.p. met duidelijke vermelding van eigen naam en adres, en van 'Ars et Mathesis'.

inlichtingen: H.P. van Tongeren; Beverodelaan 205, 6952 JH Dieren
tel. 0313-413307; email: toosenhenk@planet.nl

secretariaat: A. Goddijn; ws. Nejo, Dijkgracht 18, 1019 BT, Amsterdam
email: A.Goddijn@fi.uu.nl

aanmelding als donateur, adreswijzigingen, bestellingen:
Ineke Lambers; Noorderkroon 77, 9301 JW Roden
tel. 050-3601301; email: ilambers@wxs.nl.

Internet: *<http://www.arsetmathesis.nl>*

Ars et Mathesisproducten

verkrijgbaar: Sangaku-kwartet [sk], Sangaku-poster A3 of A4 [sp], Sangakulelikaart [slk], Sangaku-lelieposter A3 of A4 [slp]; nederlands of engels [n of e]; **nieuw:** kwartet "orde-chaos" met recent werk van Monika Buch [bk]; A&M poster A3 of A4 [amp], A&M knoop-kaart [amkk], A&M letterkaarten [amlk], A&M jubileumkaart 1998 ("luchtkubus") [amjk], A&M jubileumposter A3 of A4 [amjp]; losse nummers Arthesis vanaf jaargang 14 [art/jaargang/nr]; set van 2 verzamel posters 'A&M-kunst' op hoogglanspapier A3 of A4 [vp].

prijzen: kaarten (set van 4) • 5 , poster A4 • 2,50, poster A3 • 6, nummers Arthesis • 3,50; voor toezending A3 posters plus • 2,50, overig plus • 1,20; set van 2 posters vp: A3 • 14/toezending • 5, A4 • 8/toezending • 2.

bestelwijze: door overmaken van het totaalbedrag op giro nr 1315269 t.n.v. J.J. Lambers-Hacquebard, na bericht per post of email aan Ineke Lambers (adres zie boven) onder vermelding van 'AM-bestelling', en opgave van gewenste aantallen en soorten producten en het adres waar de bestelling naar toe moet worden gezonden. Gebruik s.v.p. de hierboven tussen [] vermelde codes.

