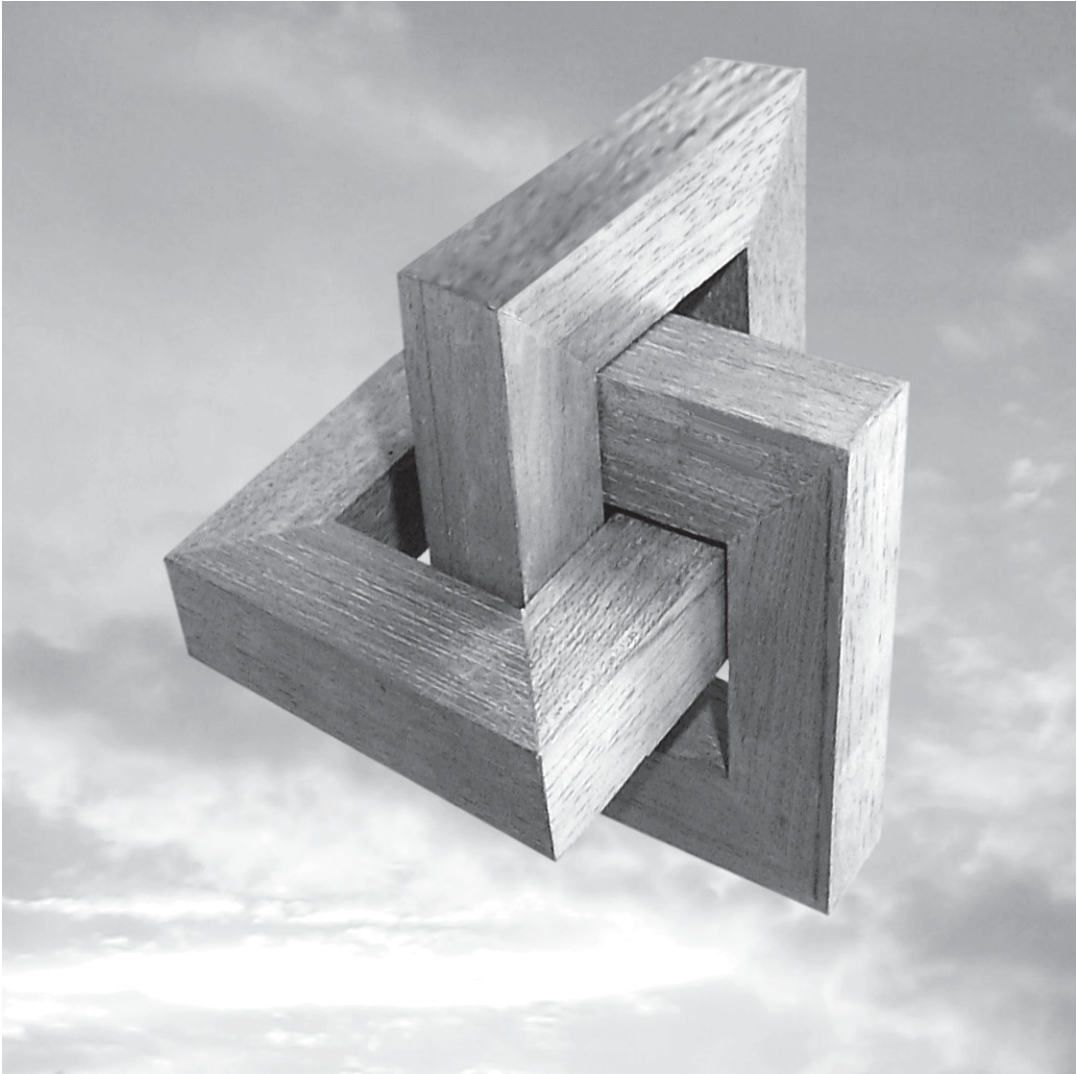


ARTHESIS

jaargang 16, nummer 1 & 2



een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis

inhoud

eindeloze eindigheid	pag. 3
contrasubjectief	pag. 4
minimaal schaakbord	pag. 8
tensegrities	pag. 10
digitaal beeldhouwen: Intersculpt	pag. 12
in memoriam Oscar Reutersvärd	pag. 17
de achtergrond van een beroemde tekening	pag. 18
logo met vaart	pag. 21
cirkels en sterren in een goddelijke komedie	pag. 22
verschuivende kubus	pag. 30
wobbelingen	pag. 31
boekbespreking: nog meer scherven	pag. 32
mededelingen en bestuur	pag. 11, 16, 29 en 34
informatie Stichting Ars et Mathesis	pag. 35



jaargang 16 nummer 1 & 2 - juli 2002

Arthesis is een uitgave van de Stichting Ars et Mathesis en wordt gratis toegezonden aan de donateurs van de Stichting. Losse nummers: € 3,50 (bestelwijze: zie kader op pag. 35).

omslag knoop Koos Verhoeff, montage Ineke Lambers

redactie Albert van der Schoot
Rinus Roelofs
Ineke Lambers (vormgeving)

redactie-adres Bart Heukelom
(v.a. 1-8-2002) Johannes van der Waalsstraat 38-I
1098 PM Amsterdam
email: b.heukelom@wxs.nl

inzenden kopij

Bij voorkeur in digitale vorm: tekst als WP- of Word-bestand; illustraties in de vorm van een goede foto of duidelijke tekening (indien mogelijk het origineel, liever geen scan of fotokopie), of digitaal aangemaakt (vectortekening in CDR of AI format; bitmaps als Jpeg of Tiff bestand en in voldoende hoge resolutie).

eindeloze eindigheid

Onbedoeld drukt de eindigheid van het menselijk leven haar stempel op dit dubbelnummer van Arthesis. Ten eerste door het overlijden van Oscar Reutersvärd, Zweeds pionier op het gebied van de onmogelijke figuren. Hans de Rijk, die lange tijd met hem contact onderhield, schreef voor hem een *In memoriam*.

In eigen kring overleed vorig jaar Bart Paul Jibben, vader van een schoolvriend. Uit de bedankkaart van de familie bleek dat vader Jibben een eigenschap had die ik niet van hem kende: praktische interesse voor de raakvlakken tussen ars en mathesis. In zijn op de kaart afgebeelde keramische werk blijft het niet bij raakvlakken, maar vindt een kleine kubus zijn weg dwars door een opengesneden grotere kubus heen. Zoon Carel Jibben legt uit wat er precies met die kubus gebeurt.

Heel onverwacht kwam de dood van de Utrechtse hoogleraar muziekwetenschap Kees Vellekoop, spreker op de Ars et Mathesisdag 2000. Een verkeersongeluk maakte in mei een eind aan zijn leven. Zoals veel musicologen die zich vooral met muziek uit Middeleeuwen en Renaissance bezighouden had Kees een levendige belangstelling voor de relaties tussen muziek en getal. De boekbespreking is gewijd aan het proefschrift van een van zijn promovendi, over getalfiguren bij Bach.

Die bespreking sluit aan bij het openingsartikel, over de dood van Bach zelf. Douglas Hofstadter meent dat er na de *Kunst der Fuge* voor Bach geen verder leven mogelijk was. Neem ook eens een kijkje op de website van dich-

tend leraar wiskunde Remco van der Zwaag (www.geocities.com/remcoudz, klik op Sonnets) en vergelijk het einde van diens *The Art of Fugue* met Bachs eigen einde op pag. 7!

Wat ons na de dood te wachten staat legt Dante uit in zijn *Divina Commedia*. Ook bij dit meesterwerk wordt er heel wat afgespeculeerd over verborgen numerieke mysteries (zie <http://hometown.aol.com/genesisformulae/Dante-Birth-Date.html>). Aad Goddijn is nagegaan van welke wis- en sterrenkundige inzichten Dante zelf blijk geeft bij de beschrijving van zijn tocht van de Hel via de Louteringsberg naar het Paradijs. In dit nummer het inleidend artikel van deze nieuwe serie.

Geniet verder van Eindige Elementen om torens te tuinen, van digitale beeldhouwkunst, van Leonardo en Vitruvius, een pentagrafisch logo, en door Hans de Rijk geïnspireerde wobbelingen. Maar beantwoord niet de slotvraag van Hans Kuiper: zo'n fascinerende sculptuur in de openbare ruimte kon wel eens dramatische gevolgen hebben voor de verkeersveiligheid!

Minder dramatisch is de eindigheid van mijn lidmaatschap van bestuur en redactie. Net als de paarse bewindslieden treed ik na acht jaar medebesturen terug om als belangstellende *backbencher* bij de Stichting betrokken te blijven. Gelukkig is er een bekwame opvolger gevonden in de persoon van Bart Heukelom. Met hem kunt u kennis maken op de datum die u nu in uw agenda noteert: de Ars et Mathesisdag 2002, op 23 november in Baarn!

Albert van der Schoot

contrasubjectief

De *Kunst der Fuge* van Johann Sebastian Bach (1685-1750) is één van de werken waarvoor de omschrijving ‘für Kenner und Liebhaber’ bij uitstek van toepassing is. Een werk dat niet geschreven werd voor een bepaalde gelegenheid (zoals bij veel van de gecomponeerde muziek uit de Barok juist wél het geval was) maar dat een stukje huisvlijt van de componist weergaf waarvan de fijne kneepjes alleen voor muzikaal geschoolden herkenbaar waren. Die hoefden het stuk niet per se tot klinken te brengen om die fijne kneepjes te herkennen; bovendien is de *Kunst der Fuge*, net als Bachs *Musikalisches Opfer*, meer een verzameling van manieren om met één hoofdthema en een beperkt aantal neventhema’s om te gaan dan een cyclisch werk dat in zijn geheel moet worden uitgevoerd (zoals een symfonie of een soloconcert). Het duurde dan ook bijna twee eeuwen voordat er een gelegenheid tot integrale openbare uitvoering werd geschapen: pas in 1927 werd de *Kunst der Fuge* in Leipzig in zijn geheel op het concertpodium uitgevoerd.

Omdat er geen bepaald ensemble bij is gedacht en het alleen maar gaat om de contrapuntische mogelijkheden van het basisthema en een stuk of zeven andere thema’s kent de *Kunst der Fuge* geen vaste instrumentatie. Die andere thema’s, die in de muzikale vaktaal *contrasubjecten* heten, worden in de 19 canons en fuga’s waar het hele werk uit bestaat telkens op andere wijze contrapuntisch met het basisthema gecombineerd. De delen van het werk zijn twee- tot

vierstemmig en het is speelbaar op klavierinstrumenten, maar er zijn inmiddels ook uitvoeringen met strijkers en blazers op CD uitgebracht. Voordeel van zo’n bezetting bij het luisteren is dat de afzonderlijke stemmen die het geheel van de fuga opbouwen makkelijker te volgen zijn.

We zouden kunnen zeggen dat de *Kunst der Fuge* een muzikaal traktaat is over de kunst van het fugaschrijven. In die zin is het een kunstwerk dat ‘gaat over’ zichzelf, een artistiek voorbeeld van zelfreferentie. Is dat niet altijd zo met een kunstwerk dat een titel heeft? Nee: vergelijk de *Max Havelaar*. Die gaat wel over iemand die Max Havelaar heet, maar niet over de *Max Havelaar* van Multatuli. En buiten het domein van het geschreven woord: Smetana’s *Moldau* gaat wel over de rivier de Moldau, maar niet over de *Moldau* van Smetana. Referentie is nog geen zelfreferentie. Maar bij de *Kunst der Fuge* is nu juist het schrijven van fuga’s in de stijl van Bach aan de orde. Als we niet het strenge criterium hanteren dat het begrip (zelf)referentie alleen als kwalificatie van talige beweringen van stal mag worden gehaald, is het dus best te verdedigen dat de *Kunst der Fuge* in haar geheel een magistraal voorbeeld van zelfreferentie is.

Met die zelfreferentie keren we terug naar een ander basisthema, namelijk dat van Douglas Hofstadters *Gödel, Escher, Bach*. Lezers met een ijzersterk langetermijngeheugen herinneren

zich misschien nog dat ik daar in eerdere jaargangen van *Arthesis* wel eens wat over geschreven heb. Daarbij zagen we dat Hofstadter het begrip zelfreferentie, dat een cruciale rol speelt in het bewijs van de Onvolledigheidsstelling van Gödel, ook probeert toe te passen op het werk van Bach en van Escher.

Zo bleek Eschers *Prentententoonstelling* niet alleen een werk waarop een prentententoonstelling staat afgebeeld, maar treffen we dit werk ook aan als een van de prenten die op die zelfde tentoonstelling getoond worden.

Hofstadter, die het *Musikalisches Opfer* gebruikt voor de raamvertelling van zijn hele boek (en de oplettende lezertjes weten nog dat Hofstadters *Gödel, Escher, Bach* een boek is dat gaat over Hofstadters *Gödel, Escher, Bach*), kon natuurlijk ook de *Kunst der Fuge* niet links laten liggen. Temeer niet omdat de zelfreferentie hier op nog een heel andere manier aan de orde komt: Bach doet er zelf ook aan mee! Hij is één van de zeer weinige componisten die gezegend is met een familienaam die geheel uit muzieknoden bestaat. Althans in het Duits, want daarin worden de tonen iets anders benoemd dan in het Nederlands:

B	=	bes
A	=	a
C	=	c
H	=	b

Bach hoeft dus maar die noten achter elkaar te zetten om een muzikaal zelfportret te componeren: componist en gecomponeerde zijn één en dezelfde persoon. Dat heeft hij maar één keer in deze onverhulde vorm gedaan (en, zoals we nog zullen zien, volgens Hofstadter kón hij dat ook geen tweede keer doen), namelijk in de allerlaatste, onvoltooide fuga van

de *Kunst der Fuge*. Andere componisten hebben, als hommage aan de Thomascantor, zijn naam vaker voor een fuga gebruikt; Schumann en Liszt zijn daarvan de bekendste.

Er zijn verschillende versies van de *Kunst der Fuge* in omloop, en ook verschillende opvattingen over de vraag welke delen er nu precies wel en niet bij horen, en in welke volgorde, maar we houden ons hier aan de versie waarbij die ene onvoltooide fuga ook inderdaad het laatste deel van het hele werk had moeten worden. Op het eerste gezicht is het merkwaardig dat het statige hoofdthema van de hele *Kunst der Fuge* in dit deel niet tot klinken komt, terwijl het in de andere 18 delen altijd wel in een of andere vorm de boventoon voert. Maar in 1880 heeft Gustav Nottebohm aannemelijk gemaakt dat Bach in dit laatste deel het hoofdthema had willen combineren met de drie thema's die er wel in worden ontwikkeld. Het is helemaal niet vanzelfsprekend dat zo iets met vier verschillende thema's mogelijk is - het zijn tenslotte niet de vier regels van een canon, maar vier melodieën met een heel eigen verloop. Maar het kan, en als Bach het stuk had kunnen voltooien zouden we dus in dit laatste deel hebben kunnen luisteren naar een vierstemmige quadrupelfuga.

Daar is Bach helaas niet aan toegekomen, en Hofstadter heeft zo zijn ideeën over de oorzaak daarvan. Zoals we kunnen verwachten worden die ideeën gepresenteerd in een vorm die tegelijkertijd de inhoud ervan weerspiegelt: de tweestemmige dialoog *Contracrostipunctus*, die gevoerd wordt tussen Achilles en de schildpad. Die titel is natuurlijk een samentrekking van de woorden *contrapunt* en *acrostichon*, en

het kost dan ook weinig moeite in de eerste letters van iedere ‘inzet’ van de beide gesprekspartners een mededeling te lezen die betrekking heeft op de dialoog zelf:

Hofstadter's Contracrostipunctus
acrostically backwards spells 'J.S. Bach'

Sterker nog: deze mededeling heeft betrekking op de mededeling zelf. Van achter naar voren gelezen vormen de letters van Bachs naam de beginletters van de eerste woorden van de zin, en vervolgens vormen de eerste letters van die woorden weer de letters van Bachs naam. Je zou dit een *gestapeld acrostichon in kreeftengang* kunnen noemen, een contrapuntisch hoogstandje dat zich in de literatuur wat makkelijker laat verwezenlijken dan in de muziek.

Hoe lang kan een slang blijven dooreten die besloten heeft zichzelf op het menu te zetten, en bij het achterste puntje van zijn staart te beginnen? Het begin van Hofstadters boek is helemaal gericht op de uitleg van de Onvolledigheidsstelling van Gödel, en dat geldt ook voor deze dialoog. De schildpad vertelt aan Achilles dat zijn vriend de kreeft in de veronderstelling verkeerde een Volmaakte Platenspeler te hebben gekocht (Hofstadters boek is nog van voor de CD!). Dat wil zeggen: een apparaat waarop ieder geluid zou kunnen worden afgespeeld. De schildpad heeft hem toen een plaatopname van een compositie van eigen hand cadeau gedaan, getiteld: ‘ik-kan-niet-afgespeeld-worden-op-deze-grammofoon’. En inderdaad: deze plaat bracht precies die klanken voort die het mechaniek van de speler niet kon verdragen, en het apparaat spatte in stukjes uiteen. Het verhaal herhaalt zich nog een

paar keer met telkens nóg volmaaktere platenspelers die de kreeft zich heeft aangeschaft: steeds worden in de composities van de schildpad die klanken gegenereerd die zich als een boemerang keren tegen het apparaat dat hen voortbrengt.

Door deze analogie geeft Hofstadter een illustratie van het principe van Gödels stelling: zoals er voor iedere platenspeler die de kreeft zich aanschaft wel een klank te vinden is die niet door die speler geproduceerd kan worden, zo is er ook in ieder formeel systeem wel een ware uitspraak te vinden die niet binnen dat systeem kan worden afgeleid.



Met het uit deze analogie gewonnen inzicht zouden we ons tevreden kunnen stellen, maar dan onderschatten we onze auteur: net als Bach houdt ook Hofstadter ervan de complexiteit van zijn contrapuntiek steeds verder op te voeren. De dialoog gaat verder en neemt ook zelf de vorm aan van een boemerang - zoals we uit

het acrostichon al hadden kunnen vermoeden. Want nu ontvangt de schildpad een cadeau-tje, dat hem door Achilles wordt overhandigd: een prachtige Glazen Bokaal (het komt Hofstadter goed uit dat het Engelse woord *Goblet* ook met de G van Gödel begint). Dit blijkt de bokaal te zijn die in 1735 door enkele leden van de familie Krebs, leerlingen van Bach, aan de Thomascantor is geschonken. Die bokaal bestaat echt, en is te vinden in het Bachmuseum in Eisenach, Bachs geboorteplaats. Op de afbeelding is het moeilijk te zien, maar de op de bovenste regel gegraveerde noten vormen het Bach-motief, zo'n 15 jaar voordat Bach dat zelf in de Kunst der Fuge als begin van een thema gebruikte. Natuurlijk herkent de schildpad het motief onmiddellijk; hij pakt zijn viool om het te spelen, maar als hij de vierde toon tot klinken brengt spat de bokaal in duizenden scherven uiteen. Het motief B-A-C-H blijkt precies de klank te zijn waar het glas niet tegen bestand is. De boemerang heeft toegeslagen: de methode waarmee de schildpad de platenspelers van de kreeft heeft vernietigd, keert zich nu tegen hemzelf.

Wat aan dit fragment lichtelijk onbevredigend blijft, is dat de klank die dodelijk blijkt voor

het glas, anders dan bij de platenspeler, niet door het vernietigde object zelf wordt voortgebracht. Als Hofstadter hier iets langer over had nagedacht, was hij misschien op het idee gekomen de schildpad een demonstratie te laten geven van de *glasharmonica*, een instrument dat midden achttiende eeuw niet onbekend was in Europa. Amerikaanse musicologen denken dat het ding pas in 1763 werd uitgevonden door Benjamin Franklin, maar die bracht in feite slechts een mechanische verbetering aan op het al langer bestaande principe van de 'musical glasses', waarbij ronddraaiende glazen met de natte vinger werden aangestreken en zo tot klinken werden gebracht. Met dat instrument had Hofstadter een sterkere parallel kunnen maken met het zelfreferentiële karakter van de Onvolledigheidsstelling.

Maar Hofstadter heeft nog een andere verrassing in petto, en in een veel morbider toepassing van zijn hang naar zelfreferentie past hij de analogie ook toe op het lot van Bach zelf. Daarvoor moeten we een blik slaan op de laatste maten van de onvoltooide partituur van de Kunst der Fuge, zoals die door Hofstadter in zijn boek zijn opgenomen en hieronder zijn afgebeeld.

235

(1685-1750)

Het rouwrandje en de jaartallen bij de vier tonen B-A-C-H zijn door Hofstadter zelf toegevoegd, maar in de originele partituur vinden we een toevoegsel van de hand van Bachs zoon, Carl Philipp Emanuel, dat luidt:

N.B. Über dieser Fuge, wo der Name
B.A.C.H. im Contrasubject angebracht
worden, ist der Verfasser gestorben.

Er zijn niet veel muziekhistorici die deze op-

merking als proces-verbaal van Bachs dood accepteren. Maar voor Hofstadter is CPE's bij-schrift natuurlijk een godsgeschenk. Zijn boek leeft van de combinatie van zelfreferentie en niveaoverschuiving; wat is er dan mooier dan te suggereren dat Bach het leven liet, doordat hij een logische kortsluiting veroorzaakte tussen componist en compositie?

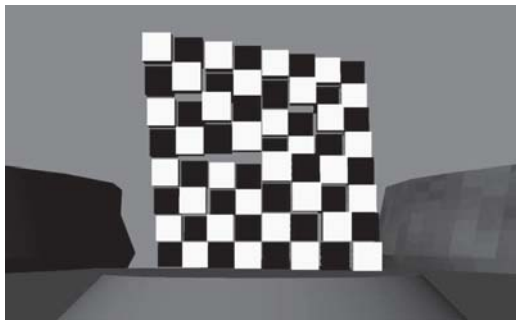
Albert van der Schoot

minimaal schaakbord als kunstwerk voor de openbare ruimte

Is het mogelijk een kunstwerk te creëren dat van zes kanten bekeken de aanblik biedt van een schaakbord, met gebruikmaking van slechts 64 kubussen?

Dat vroeg ik me af nadat ik in het Haags Gemeentemuseum een tentoonstelling had bezocht over Minimal Art, met onder andere werk van de Amerikaan Sol LeWitt, een kunstenaar van de minimalistische beweging.

In *Het Kunstboek* staat over LeWitt dat hij het idee achter een werk belangrijker vindt dan het werk zelf, en dat het plan belangrijker is dan de constructie.



Maar ik zag in gedachten mijn 'kubus', want dat wordt het in feite, al staan op een rotonde, die de kruising vormt van twee loodrechte wegen. Al aanrijdend op de rotonde zie je het beeld van een schaakbord, terwijl je de rotonde neemt verschuiven de kubussen onderling voortdurend, en in de achteruitkijkspiegel zie je weer een schaakbord, onafhankelijk of je afslaat na 1/4, 1/2 of 3/4 van de rotonde. Zo'n kunstwerk kan het natuurlijk ook goed doen centraal op een plein, met vier goed geplande gezichtspunten. Een leuk idee, met een leuk resultaat. Ten opzichte van de opvatting van LeWitt een win-win-situatie.

Ik ben sinds kort gebruiker van het programma Rhinoceros, waarmee je op een makkelijke manier 3D-modellen kunt maken. Ik gebruikte dit programma om proberenderwijs tot een resultaat te komen. Dat lukte me zo niet. In het beste geval lukte het me in vier aanzichten alle 64 vlakken te vullen, maar in de twee andere aanzichten ontbraken er twee



vlakjes. Nu kun je zeggen dat je op een rotonde maar vier aanzichten hebt – waar maak je je dan zorgen over? – maar ik wil toch niet dat ik, bij een rondvlucht boven de rotonde, betrappt word op een onvolkomenheid.

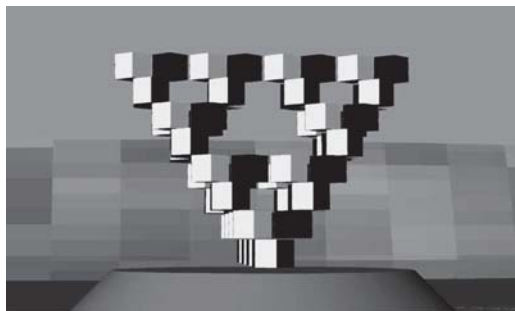
Als je er systematisch naar kijkt, dan blijken er miljoenen verschillende mogelijkheden te zijn. Ik heb een poging gedaan om precies te bepalen hoeveel. Daar ben ik mee gestopt. Het resultaat ervan vermeld ik hier niet, omdat ik zeker weet dat ik niet alle mogelijkheden heb onderkend. Er is in ieder geval keus te over, zodat er rekening gehouden kan worden met het uiterlijk, de maakbaarheid, sterkte, stabiliteit, etcetera. Welke combinaties vormen mooie kunstwerken gezien vanuit een andere hoek dan vanuit de aanrijdroutes? En bij welke combinatie is de optische illusie van de ana-



morfose het grootst?

Bijgaande illustraties tonen de combinatie waarbij de diagonaal van het schaakbord in de buitenste schil zit. Ze geven aan hoe één van mijn minimale schaakkubussen er uit kan komen te zien.

Het is niet mogelijk om het kunstwerk te maken met 32 witte en 32 zwarte kubussen. Om

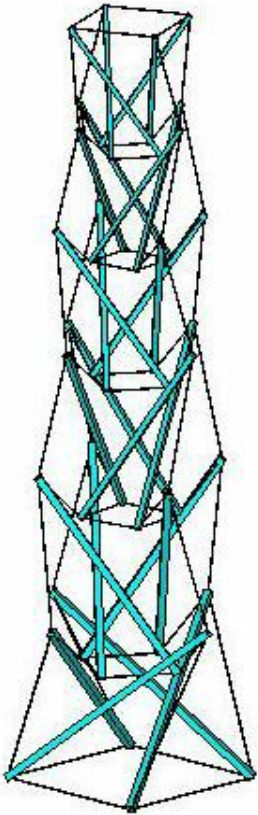


van alle zes kanten het beeld van een schaakbord te krijgen moeten de vlakken van elke afzonderlijke kubus naar behoefte ingekleurd worden.

Met dank aan LeWitt voor de inspiratie. Wie weet er een leuk plekje voor?

Hans Kuiper

tensegrities



De hierbij afgebeelde toren, ongeveer 4,5 meter hoog, heb ik op bijeenkomsten van gebruikers van computer-programma's, gebaseerd op de Eindige-Elementen-Methode, gebruikt om resultaten van die programma's te verifiëren. Een dergelijke toren staat ook in mijn voortuin.

Omdat constructies meer gaan leven als er achtergrondinformatie beschikbaar is en ik dan tevens voorkom telkens hetzelfde verhaaltje te moeten vertellen, wil ik in dit artikeltje het 'hoe en waarom' van deze toren beschrijven.

waarom?

In een technisch tijdschrift van eind jaren '60 stond een artikel over de wonderlijke toren van Kenneth Snelson. In de beeldentuin van het Kröller-Müller museum op De Hoge Veluwe was die zomer zijn zogenaamde 'Needle Tower' geplaatst.

Deze wonderlijke toren rees, ongetuid doch stabiel, tot 18 meter recht omhoog. Hij bestond

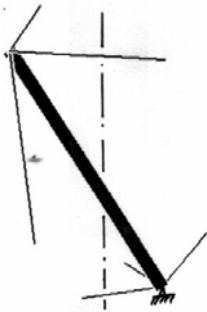
uit 10 x 3 drukstaven verbonden door een 90-tal spankabels. (Velen van u zullen hem in die beeldentuin wel eens hebben gezien; in *Arthesis* 15/2 op pag. 12 is Snelson's 'Needle Tower II' te zien, n.a.v. de tentoonstelling *Schaal en Maat*). Tot zover geen bijzonders, echter de laatste zin in dat artikel stond mij niet aan: *Kenneth Snelson beweert dat geen ingenieur in staat zou zijn dit te berekenen*. Wat berekenen betreft bedoelde hij de sterkte en de stijfheid.

Zoiets moet je natuurlijk niet tegen een constructeur zeggen! We zullen wel eens even laten zien dat zo'n ruimtelijke constructie met de huidige computer-programmatuur eenvoudig te berekenen is.

Op dat moment had ik echter geen tijd om een proefje te doen. Jaren later, in de winter van 1978, herinnerde ik me dit probleem. Even het bewuste artikel zoeken; natuurlijk nergens te vinden! Dan maar zelf een torentje bedenken. Ik herinnerde me wel dat de toren uit alléén trek- en drukstaven bestond, en dat de drukstaven elkaar *niet* raakten. Overigens, trekstaven zijn draden, kettingen e.d., drukstaven zijn buizen, stokken e.d. Ga je gang

hoe?

Een mast kun je tuien met drie draden; meer hoeft niet, minder kan niet. Als je de onderkant van deze mast of stok nu niet op de grond zet maar ook in drie draden ophangt, staat hij stabiel in de ruimte. Zie de tweede figuur. Door nu deze ene mast met zes draden 0, 90, 180 en 270 graden te draaien om de verticale stippellijn ontstaat de derde figuur.

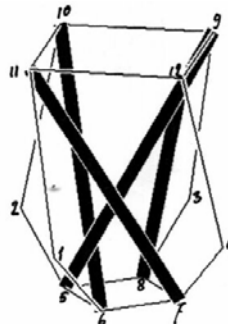


De derde figuur is nu één etage van de toren. Natuurlijk zijn de lengtes van de draden t.o.v. de stokken niet willekeurig. Met een beetje mechanica-kennis zie je dat bijvoorbeeld punt 1 in een vlak door de punten 7-11-9 moet liggen.

Met dit gegeven is het mogelijk alle knopen in ruimtelijke coördinaten vast te leggen. Met het vastzetten van de punten 1 t/m 4 staan de vier stokken stabiel in de ruimte en kan ik bijvoorbeeld de bovenkant van de stokken (punten 9 t/m 12) als steunpunt voor de volgende etage gebruiken.

Dit soort constructies heet *tensegrities* (tensional integrities). Anthony Pugh geeft in zijn boek *An introduction to tensegrity* de volgende definitie: 'A tensegrity system is established when a set of discontinuous tensile compressive components interacts with a set of continuous tensile components to define a stable volume in space.'

Zelf heb ik daaraan toegevoegd: *a minimum number of tensile components*. Dat wil dus zeggen dat iedere stok met zes draden is verbonden en niet meer. Snelson gebruikt meestal acht en soms zelfs tien draden per stok. Dat is dus te veel. Je kunt dat aan zijn 'Needle Tower' dan ook zien, er hangen een aantal draden slap, die heb je dus niet nodig! Een nadeel van mijn *minimum number of tensile components* is dat als er één stok breekt of één draad doorroest de toren in elkaar stort! Dat is dan ook ooit gebeurd.



berekening

De aanleiding voor dit geheel was de opmerking van Kenneth Snelson dat een constructeur dit soort torens niet kan berekenen.

Het moge duidelijk zijn dat het mij uiteindelijk gelukt is de sterkte en stijfheid van der-

gelijke constructies te berekenen. Het bewijs daarvan is de toren op pag. 10. Het voert te ver om in *Arthesis* daar verder op in te gaan. Ik moet nog wel zeggen dat Snelson eind jaren '60 gelijk had met zijn opmerking. Pas halverwege de jaren '70 kwamen, met name via de NASA, computerprogramma's beschikbaar voor het berekenen van dit soort constructies.

Jan W. Marcus

praktische zaken

* Het adres van Ineke Lambers (voor aanmeldingen als donateur, adreswijzigingen en bestellingen) is gewijzigd: zie het informatie kader op bladzij 35. Vergeet i.g.v. verhuizing s.v.p. niet Uw nieuwe adres door te geven!

* Herhaald verzoek: beschikt U over een email-adres, geef dat dan door met een mailtje aan ilambers@wxs.nl, met als onderwerp 'adres AM' en in het bericht naam en woonplaats.

* Aan de te bestellen Ars et Mathesisproducten zijn toegevoegd de verzamel posters die op de Ars et Mathesisdag 2001 zijn gepresenteerd. Twee fraaie posters op fotopapier, met een staalkaart van 'A&M-kunstenaars'; zie bladzij 35!

digitaal beeldhouwen: Intersculpt

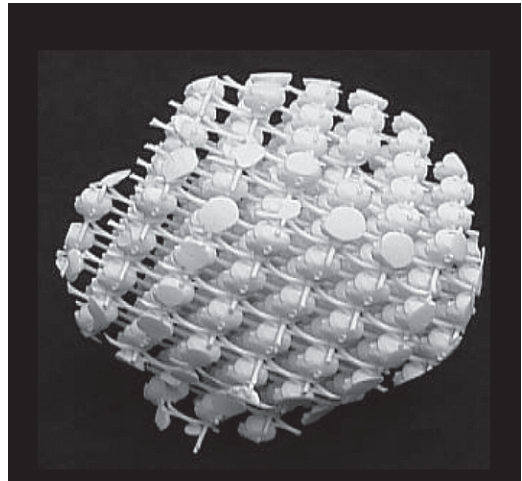
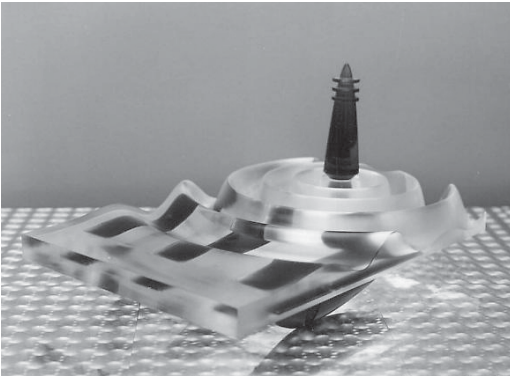
Een 'computerbeeldhouwwerk' is een driedimensionale vorm, gemodelleerd op een computer, gemaakt met alleen een esthetisch doel, en zodanig dat het bekeken kan worden op een beeldscherm en geproduceerd kan worden door een computergestuurde (frees-)machine of met behulp van rapid prototyping apparatuur.

Aldus de definitie in het reglement van de International Digital Sculpture Competition. Deze competitie is onderdeel van het tweejaarlijkse evenement Intersculpt, georganiseerd door o.a. Ars Mathematica, onze Franse zusterorganisatie. In 2003 vindt de derde editie van dit evenement plaats in Parijs, New Orleans, Hong Kong en nog een aantal plaatsen. Omdat er plannen zijn om ook vanuit Ars et Mathesis een bijdrage te leveren willen we wat nader ingaan op het begrip digitale beeldhouwkunst en Intersculpt.

begin en opkomst

In 2001 heb ik zelf meegedaan met bovengenoemde competitie en in Parijs Christian Lavigne, voorzitter van Ars Mathematica ont-

Lavigne - L'Émergence (1994/1995)

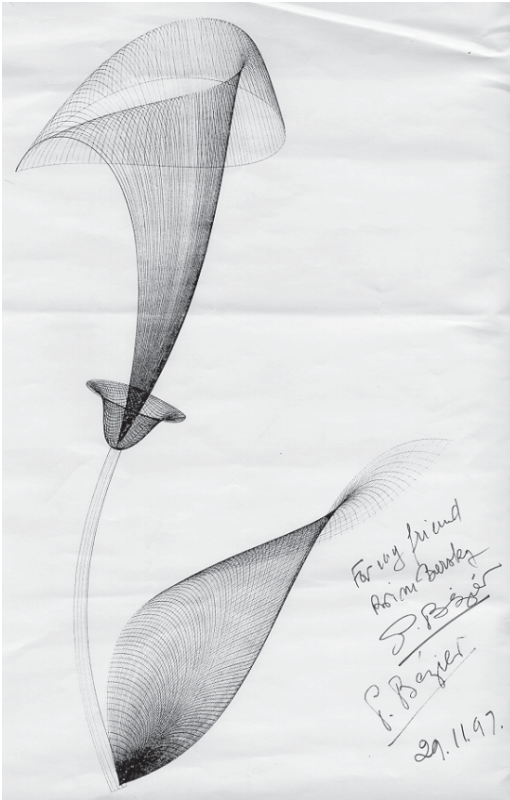


Lavigne - Cybersaly I - Multiplicité de l'être (200/2001)

moet. Christian is zelf beeldhouwer en al jaren actief als promotor van de digitale beeldhouwkunst.

Christian noemt als beginpunt van deze kunstvorm Pierre Bezier, de Franse wiskundige, die in het begin van de jaren '60 met nieuwe wiskundige methoden kwam waarmee gekromde lijnen eenvoudig konden worden beschreven en vastgelegd. Deze zogenaamde Bezier-curven zijn vanaf die tijd een belangrijke basis voor computer-tekenprogramma's.

Eind jaren '60 ontstonden in de ontwerpstudio's van Renault, waar Bezier als ingenieur in dienst was, de eerste abstracte vormen, houten



Bezier - Fleur dessin assisté par ordinateur (1997)

objecten, gemaakt met behulp van computer-gestuurde freesmachines. In het begin van de zeventiger jaren begint dan de digitale beeldhouwkunst te ontstaan, maar pas met de komst van de PC's en de ontwikkeling van de rapid prototyping technieken komt deze vorm van beeldhouwen verder tot ontwikkeling.

drie soorten activiteiten

Onder de term 'digitaal beeldhouwen' vallen eigenlijk drie verschillende activiteiten welke vaak complementair zijn:

1. Het creëren en visualiseren met de computer van vormen of constructies in 3 dimen-

sies, of zelfs 4: inclusief de tijd. Kortweg: digitaal modelleren.

2. Het digitaliseren van bestaande objecten en die veranderen d.m.v. computerberekeningen.

3. Het produceren van fysieke objecten met behulp van computergestuurde machines als freesmachines en rapid prototyping machines.

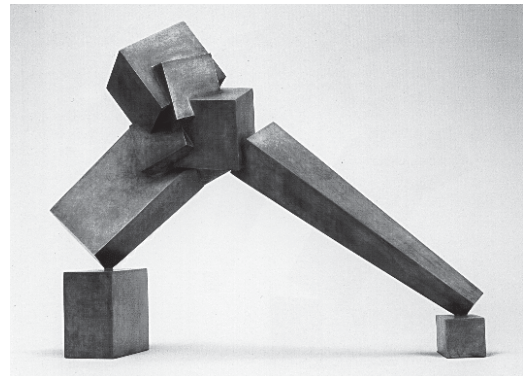
digitaal en virtueel

Het lijkt verder zinvol om onderscheid te maken te maken tussen digitale beeldhouwkunst en virtuele beeldhouwkunst. Bij de eerste gaat het altijd om ontwerpen welke daadwerkelijk omgezet kunnen worden in een fysiek object, terwijl bij de virtuele beeldhouwkunst het uiteindelijk werk een niet-materieel beeld is, in de vorm van een 3D-beeld of animatie. We komen deze beelden bijvoorbeeld tegen op het internet, in virtuele galeriën, of zelfs in complete virtuele beeldenparken (DAAP - wat staat voor Design, Architecture, Art, and Planning).

ontwikkelingen in de jaren '90

In 1992 verenigden zich een aantal Amerikaanse digitale beeldhouwers - Bruce Beasley, Rob Fisher en Tim Duffield - in Computers and

Beasley - Keystone (1988)



Sculpture Forum. In datzelfde jaar werd in Frankrijk Ars Mathematica opgericht door Christian Lavigne en Alexandre Vitkine. En al snel ontstonden contacten via internet, welke o.a. leidden tot presentaties van beelden in VRML-formaat (Virtual Reality Modeling Language), een manier van presenteren waarbij de kijker de stand van het object op zijn computerscherm kan bepalen, en zodoende dus het beeld van alle kanten kan bekijken.

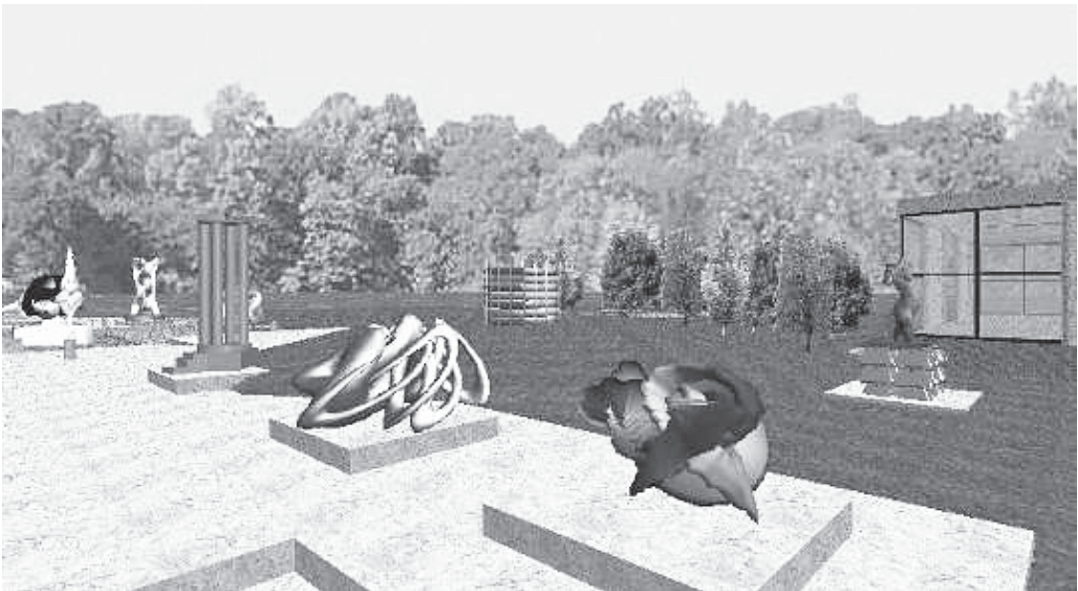
In 1996 werd het eerste digitale beeldenpark opgericht door Derrick Woodham, beeldhouwer en docent aan het Cincinnati College of Art. In dit beeldenpark, te bezoeken op internet via <http://www.cerhas.uc.edu/dwoodham/daap2.htm>, loop je temidden van andere bezoekers door een park waar zowel virtuele als te realiseren beelden te zien zijn. Ook de inzendingen voor de Digital Sculpture Competition zijn in dit park geplaatst.

digitaal modelleren

Veelal gebruiken digitale beeldhouwers de computer om hun ontwerpen te bedenken, te visualiseren en te presenteren. En hiervoor is geschikte programmatuur nodig.

Meest bekend, zeker in het begin, waren programma's als 3D-studio MAX en Mathematica. Koos Verhoeff heeft voor veel van zijn beelden gebruik gemaakt van Mathematica. Daarnaast werden ook zelfgeschreven programma's gebruikt. Opmerkelijk is dat veel digitale beeldhouwers uit de begintijd (zeker in Amerika) tevens docent of onderzoeker waren. Inmiddels zijn er meer en betere programma's ontwikkeld, wat de toegankelijkheid van deze manier van werken aanzienlijk heeft vergroot. In de begintijd was het vrijwel altijd de bedoeling om vanuit het op de computer gemodelleerde beeld te komen tot een gerealiseerd object. Waarschijnlijk omdat het vaak om con-

Derrick Woodham - een kijkje in het virtuele beeldenpark DAAP



ventionele beeldhouwers ging die de computer zijn gaan gebruiken. Tegenwoordig blijft het langer onduidelijk of het eindresultaat een fysiek dan wel een virtueel beeld wordt. Ook worden ontwerpen soms naar beide richtingen uitgewerkt.

digitaliseren

In 1998 werd tijdens de International Sculpture Conference in Chicago getoond hoe een traditioneel beeldhouwwerk (handmatig gemodelleerd), via 3D-digitaliseren vergroot kan worden uitgefreesd uit een blok hardschuim. De '3D-pantograaf', een wens die al leefde bij de Renaissance-kunstenaars, was werkelijkheid geworden. Deze nieuwe technieken geven kunstenaars weer nieuwe mogelijkheden. De Amerikaanse kunstenaar Dan Collins gebruikte het bijvoorbeeld om anamorfose- of metamorfosebeelden te maken vanuit bestaande vormen zoals zijn eigen gezicht.

productie - rapid prototyping

Van meet af aan is er de behoefte geweest het bedachte object te visualiseren en ook produceren. In de jaren '70 kon men gebruik maken van computergestuurde frees- en draaibanken. In de jaren '80 kwamen daar de computergestuurde snijmachines (lasersnijders, waterstraalsnijders) bij, die echter over het algemeen nog weinig toegankelijk waren voor kunstenaars. Christian Lavigne is een van de mensen die hier al vrij vroeg mee konden experimenteren. Met de komst van rapid prototyping technieken in de jaren '90 zijn de mogelijkheden om de digitale beelden te verwezenlijken nagenoeg volledig geworden. Het grote verschil met de frees- en snijtechnieken is dat de objecten nu additief (met toevoegen



Dan Collins - Danwave

van materiaal) worden opgebouwd, i.t.t. de subtractieve werkwijze (weghalen van materiaal) van de frees- en snijmachines. Het realiseren van beelden waarin holtes voorkomen is mogelijk met rapid prototyping technieken. Er zijn verschillende systemen bedacht. In het algemeen komt het er op neer dat een object wordt opgebouwd door middel van het 'printen' van doorsneden. De computer berekent van onder tot boven de opeenvolgende doorsnedetekeningen welke achtereenvolgens, laagje voor laagje, worden gerealiseerd. Met deze 3D-printtechnieken zijn nagenoeg alle vormen te realiseren, in verschillende materialen, waaronder was, zodat het ook met behulp van de traditionele giettechnieken omgezet kan worden in bijvoorbeeld brons. Ook is het al mogelijk om kleur toe voegen, zodat een ontwerp in 3D, full color, uitgeprint kan worden.

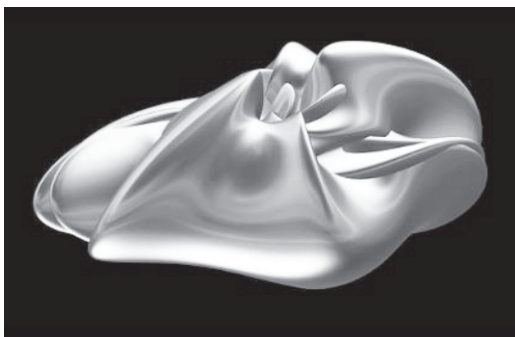


Longtin - Moebius Helix, computertekening (2001)

Intersculpt

Hoewel deze vorm van beeldhouwkunst nog vrij jong is, en de technische middelen soms nog wat moeilijk toegankelijk zijn voor kunstenaars, is er toch een groeiend aantal beeldhouwers en vormgevers mee bezig. Een belangrijk platform voor het uitwisselen van ervaringen en gedachten is Intersculpt, het tweejaarlijkse evenement dat parallel op een aantal plaatsen in de wereld plaatsvindt. Via het in-

Brown - Continuity of form



ternet, o.a. met behulp van webcams, zijn de locaties met elkaar verbonden en kan een aantal activiteiten ook thuis 'live' worden gevolgd. Een vast onderdeel van Intersculpt is de International Competition for Digital Sculpture. De inzendingen voor deze competitie laten vooral de uitgebreidheid van de mogelijkheden zien. Winnaar van 2001 is de in Ars et Mathesiskringen welbekende Tom Longtin.

Zie voor meer informatie over Intersculpt 2001 <http://www.intersculpt.org/is2001/index.htm>.

Rinus Roelofs



Longtin - Moebius Helix, Rapid Prototyping model (2002)

CWI exposities

Op onze vaste expositieplek in het Amsterdamse CWI is de afgelopen maanden een tentoonstelling te zien geweest van Paul Clark. Er is nu weer plaats voor nieuwe exposanten: wie eigen werk wil laten zien, kan contact opnemen met Zsofia Ruttkay, email Zsofia.Ruttkay@cw.nl.

in memoriam OSCAR REUTERSVÄRD 1915-2002

Sinds ik Oscar Reutersvärd heb leren kennen (begin jaren '80) heeft hij me vier keer bezocht en wisselden we enige honderden brieven. Zijn laatste brief is gedateerd 3 april 2001. Hier volgt een passage daaruit:

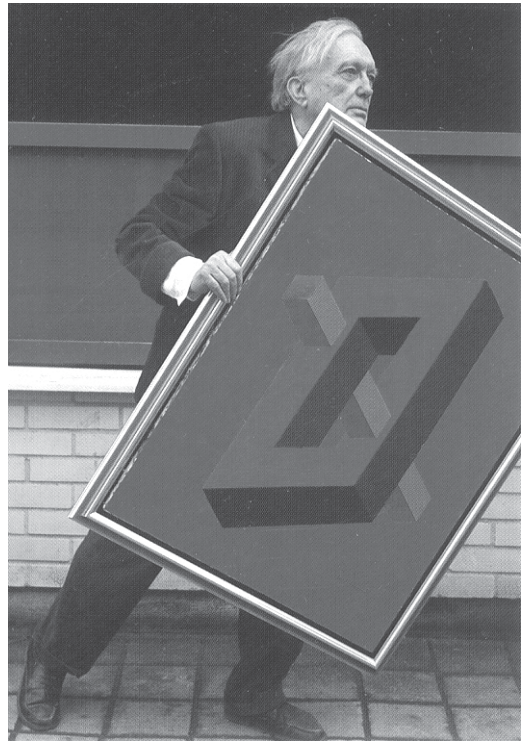
'Sedert enige weken ben ik ijverig, productief en innovatief. Maar bovenal ben ik op het spoor van een totaal nieuw type onmogelijke figuren. Ik zie het duidelijk in mijn verbeelding. Het vlecht het nabije en het veraf gelegene op een overweldigende manier ineen. Ik hoop deze vondst te kunnen uitvoeren. Ik heb al een hele serie probeersels en mislukkingen achter de rug, maar nog geen bevredigend resultaat bereikt. Als het slaagt, zal ik misschien in staat zijn een binnenstebuiten gekeerde Eiffeltoren te tekenen.'

Reutersvärd was toen 86 jaar 'jong'.

Ik schreef hem nog vier brieven, die hij niet beantwoordde; heel ongewoon voor hem.

In het begin van dit jaar kreeg ik een brief van zijn zoon Pontus, waarin hij de dood van zijn vader op 6 februari 2002 meldde. Ook werd diens stilzwijgen duidelijk: zijn vrouw Britt, een bekende schilderes, was in augustus 2001 gestorven en daarna was elke wil om verder te leven uit hem verdwenen. Hij raakte in een diepe depressie en stierf aan een hartaanval.

Reutersvärd was professor in de kunstgeschiedenis en een buitengewoon veelzijdig kunstenaar. In verschillende Zweedse steden vinden we op openbare pleinen abstracte kunstwerken van hem; in 1983 ontwierp hij voor de Zweedse posterijen een serie van drie zegels



met onmogelijke figuren. Hij interesseerde zich voor de verspreiding van bepaalde typen doopvonten in de Scandinavische landen en in Noord-Duitsland. Hij ontwierp talloze vernuftige doolhoven, een onderwerp waarvoor in ons land nauwelijks belangstelling bestaat, maar in Zweden des te meer.

Wij kennen hem vooral als de uitvinder van *onmogelijke figuren*.

Hij beschrijft zijn vondst zelf als volgt:

'Op de middelbare school, tijdens de Latijnse les, maakte ik tekeningetjes in de marge van

mijn grammaticaboek. Ik probeerde uit de hand zo nauwkeurig mogelijk sterren te tekenen met 4, 5, 6, 7 en 8 punten. Op een dag tekende ik een zespuntige ster waaraan zes kubussen vastzaten; dat was een vreemd gezicht. Ik voegde nog drie kubussen eraan toe om een driehoekige vorm te krijgen. Dat dit een paradoxale figuur opleverde had ik meteen door.' Onmogelijke figuren verzinnen werd van toen af een hobby. Toen hij zijn eerste onmogelijke driebalk (samengesteld uit kubussen) gevonden had bleef hij niet alleen daarop voortborduren, maar vond hij ook bijna alle nu bekende prototypen van onmogelijke figuren: de eindeloze trappen, de duivelsvork, de meer-voudige vlakken enzovoort. Pas veel later werden deze typen ook door anderen gevonden,

die er echter nauwelijks iets mee deden. Het aantal prenten dat Reutersvärd tekende loopt in de duizenden. Zijn onmogelijke figuren zijn abstract en nooit verpakt in realistische scènes. Maar het zijn fraaie, grafisch uitgebalanceerde prenten. Ze zijn uit de vrije hand getekend. Er kwam geen liniaal aan te pas. Hij gebruikte meestal Japans papier of een tekenpapier met een grove oppervlakte waardoor de lijnen de voor hem zo karakteristieke levendigheid krijgen.

Als mens was Reutersvärd een vriendelijke en innemende man. Voor mij en voor velen een royale en goede vriend; iemand die je erg mist nu hij er niet meer is.

Hans de Rijk

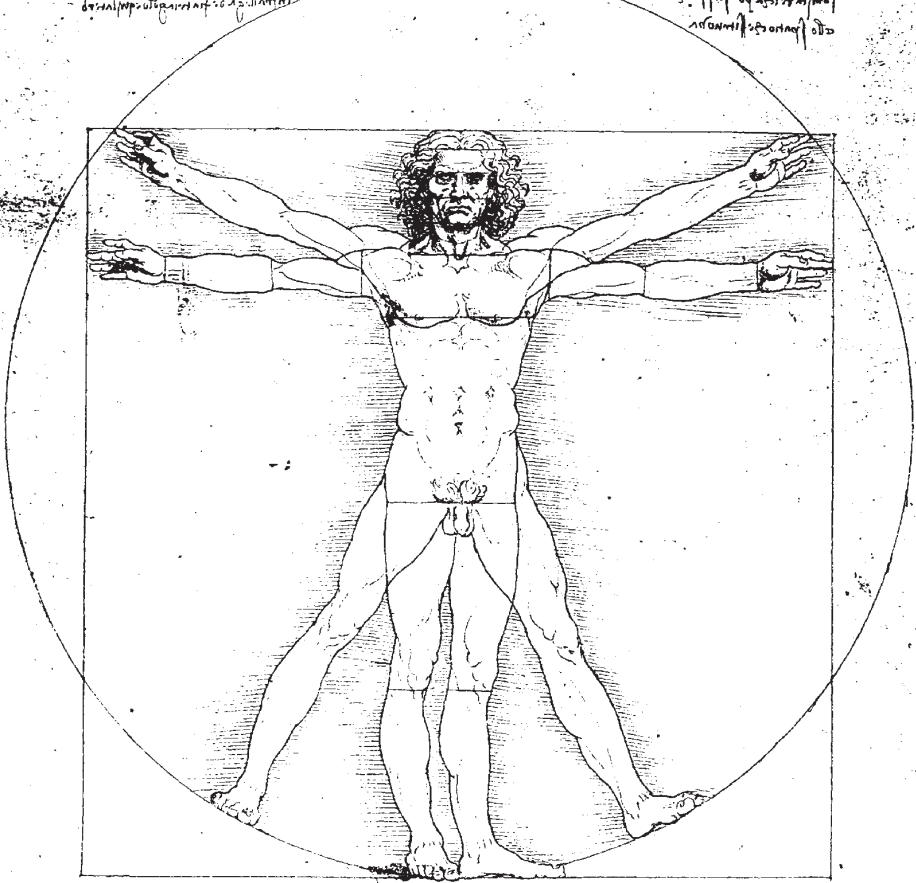
de achtergrond van een beroemde tekening: ars et mathesis

De op de pagina hiernaast weergegeven tekening, bijna het 'handelsmerk' van Leonardo da Vinci, heeft U ongetwijfeld meerdere malen gezien. Ze wordt te pas en te onpas gebruikt in verband met vernuft, techniek, wetenschap en andere verwante zaken. Een logo! Letterlijk zou ze het symbool kunnen zijn van Ars et Mathesis. De Ars zou dan de dubbele mensfiguur zijn en de Mathesis is aanwezig door de hem perfect omsluitende figuren: vierkant en cirkel.

Ik wilde wel eens weten in welke context Leonardo da Vinci deze tekening gemaakt heeft. Daarbij waren er drie moeilijkheden die in de weg stonden.

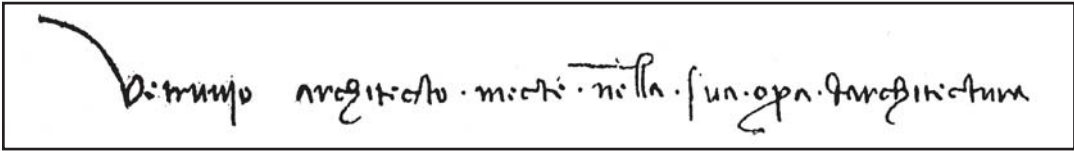
Allereerst moeten we beschikken over een goede reproductie met de bijbehorende tekst. Het is een blad van vrij groot formaat (34,3 x 24,5 cm), waarschijnlijk in 1490 geschreven, dat bewaard wordt in de Academie van Venetië. Aanvankelijk werkte ik met een zeer matige reproductie, waarmee ik al een deel van de puzzel kon oplossen. Later bleek er een heldere, op ware grootte weergegeven reproductie te staan in een boek van Mario Constantino, in 1991 uitgegeven door Park Lane (Londen). Ten tweede schreef Leonardo zijn talloze manuscripten in spiegelschrift van rechts naar links. Dat was ook te verhelpen: maak een kopie op transparant, keer dat dan om en kopieer de transparant.

Handwritten text in a cursive script, likely a Latin manuscript, located at the top of the page. The text is arranged in several lines and appears to be a preface or introduction to the drawing below.



Handwritten text in a cursive script, likely a Latin manuscript, located below the drawing. It appears to be a continuation of the text from the top of the page.

Handwritten text in a cursive script, likely a Latin manuscript, located at the bottom of the page. It appears to be a continuation of the text from the top of the page.



Een derde moeilijkheid was: Leonardo schreef een Italiaans van 500 jaar geleden. Dat is zelfs voor een Italiaan moeilijk te lezen, zoals wij bijvoorbeeld moeite hebben met verzen van Hadewych of proza van P.C. Hooft. Mijn Italiaanse vrienden konden daarbij niet veel hulp bieden. Dan blijft er niet veel anders over dan detective spelen: met weinig gegevens toch de inhoud van de tekst zien te vinden.

Aanvankelijk kon ik in de eerste regel maar drie woorden ontcijferen en de rest raden. Bovenaan deze pagina is de beginregel van het blad op pagina 19 te zien; het spiegelschrift is omgezet in normaal schrift.

De betere reproductie bevestigde dat het raden succesvol was geweest:

*Vitruvio architecto mette nella sua opera
d'architettura....*

De vertaling is niet moeilijk:

Vitruvius, de architect, stelt in zijn werk over architectuur....

We worden dus verwezen naar de Romeinse architect Vitruvius, die in de eerste eeuw zijn tien boeken over architectuur schreef. Daarvan had ik een Engelse vertaling bij de hand. Maar naar welke passage bij Vitruvius verwijst Leonardo? In zijn handschrift is een aantal woorden te herkennen die duiden op lichaamsverhoudingen. Dat brengt ons naar boek III, hoofdstuk 1, waar Vitruvius betoogt dat de

onderlinge verhoudingen van de lichaamsdelen van de mens terug moeten komen in de onderlinge verhoudingen van elementen van gebouwen.

Het blijkt dat Leonardo de tekst van Vitruvius redelijk goed volgt en dat maakt het ontcijferen van de Italiaanse tekst wat eenvoudiger: het is voornamelijk een opsomming van de onderlinge verhoudingen van de lichaamsdelen van de mens.

De bladzijde eindigt met:

'De delen die zich tussen de kin en de neus en de haargrens en de wenkbrauwen bevinden zijn elk even groot en zijn elk een derde van het gezicht.'

Interessant is, dat Vitruvius al bijna letterlijk beschrijft wat Leonardo in zijn beroemde tekening weergeeft:

'Als men plat op zijn rug ligt met gestrekte armen en benen en een passer op de punt van de navel plaatst, zullen de vingers en tenen van beide handen en voeten de omtrek van een cirkel raken die door de passer beschreven wordt. En zoals het menselijk lichaam zich uitstrekt tot een cirkel, raakt het ook aan een vierkant. Want als wij de afstand van de voetzolen tot de kruin van het hoofd meten en dan deze afstand vergelijken met die van de uitgestrekte armen, blijkt de breedte even groot te zijn als de hoogte, zoals het geval is bij een volmaakt vierkant.' *(Vitruvius, boek III hfst. 1).*

We herkennen meteen de relatie tot Leonardo's tekening.

Leonardo's weergave van deze Vitruvius-passage wijkt daarvan op enige punten af. Waarschijnlijk heeft Leonardo daar eigen opmetingen in verwerkt.

'Als men de benen zover spreidt dat men een veertiende kleiner wordt en als men de armen zo heft dat de middelvingers de over het hoofd getrokken lijn raken, weet dan, dat het middelpunt van de gestrekte ledematen de navel is en dat het deel tussen de benen een gelijkzijdige driehoek is.'

Nu komt iets verrassends. Leonardo schrijft verder niets over een vierkant, maar geeft als een soort onderschrift bij zijn tekening:

'De mens kan zijn armen zover uitstrekken als zijn lengte.'

In verband met de tekening is duidelijk dat Leonardo hiermee de passage over het vierkant bij Vitruvius vrij vertaalt. Na dit onderschrift gaat de tekst weer verder met het opgeven van de ideale verhoudingen van de delen van het menselijk lichaam, om te eindigen met de hiervoor reeds aangehaalde zin.

Uit de speurtocht naar de context van Leonardo da Vinci's tekening kunnen we dus de volgende conclusie trekken. Deze beroemde tekening is een illustratie van een passage waarin hij Vitruvius aanhaalt. De tekst die op de figuur slaat behandelt de verhouding van de lengte van de mens en zijn uitgestrekte ledematen, die zich wonderwel binnen een cirkel en een vierkant laten beschrijven. Het idee is van Vitruvius, de tekening van Leonardo.

Bruno Ernst

logo met vaart



In Arthesis 15/2 was een eerste voorbeeld te zien van onmogelijke figuren in bedrijfslogo's, zoals wiskundedocent Joop van der Vaart die signaleerde en fotografeerde. Hierboven een tweede door hem vastgelegd staaltje van onverwachte 'wiskunst' in het leven van alledag. Geef uw ogen de kost, thuis of op vakantie, en spoor meer van dergelijke uitingen op voor wat met uw bijdragen een langer lopende rubriek in Arthesis zou kunnen worden.

cirkels en sterren in een goddelijke komedie

deel 1: wiskunde halverwege de waarheid

inleiding

Dante Alighieri (1265-1321) opent zijn *Divina Commedia* met de volgende terzine:

*Op het midden van ons levenspad gekomen,
kwam ik bij zinnen in een donker woud,
Want ik had niet de rechte weg genomen.*

[Hel I, 1-3¹]

De weg blijkt op dat moment ook nog versperd door een panter, een leeuw en een wolf. De eerste twee van deze drie kwamen rond 1300 hoogstwaarschijnlijk niet in Italië voor, maar Dante is dan ook niet in zijn geboortestreek Toscane verdwaald, maar op zijn 'levenspad'. Direct onder de oppervlakte van het verhaal schuilt de allegorie, de symboliek. De dieren staan voor de wellust, de hoogmoed en de hebzucht. Passeren lukt niet en ieder die ook maar een snippertje nederig zelfinzicht heeft, begrijpt dat heel goed. Dante vindt hier de dichter Vergilius, zijn grote voorbeeld, die hem uit zijn dwalingen zal begeleiden op een tocht door Hel en Louteringsberg. Beatrice, die Vergilius heeft gezonden, zal hem later naar het hoogste der hemelen brengen.

De tocht van de pelgrim Dante is een spirituele, beschreven minstens acht jaar na het plaatsvinden van het visioen zelf. Dante – de schrijver – neemt volop gelegenheid zijn poli-

tieke voorkeuren, zijn poëtische visie, zijn weergaloze zin voor het menselijke detail, zijn filosofische en theologische opvattingen te etaleren. In dit artikel komen vooral de wis- en sterrenkundige inzichten van Dante aan bod, maar deze aspecten staan bij Dante niet los van de rest. Dante was geen beroeps wis- of sterrenkundige, hij was wel diepgaand geïnteresseerd in wat op het toneel van aarde en kosmos vertoond wordt; de *Divina Commedia* laat zien tot welke 'wetenschappelijke' kennis een nieuwsgierige leek rond 1300 toegang had.

een eerste voorbeeld

In het tweede canto van het derde deel van de *Divina Commedia*, Het Paradijs, bevindt Dante zich met Beatrice in de eerste hemelsfeer, die van de Maan. Dante oppert dat de vlekken op de maan veroorzaakt worden door verschillen in dichtheid. Beatrice wijst hem dan op de zonsverduistering, dan komt nergens zonlicht door de maan heen, en in een uitvoerige toelichting ook nog op het feit dat een kaars door een verre spiegel weliswaar kleiner wordt gereflecteerd, maar niet minder fel. Zie de op de pagina hiernaast afgebeelde miniatuur van Giovanni di Paolo, van rond 1445. Dit stukje modern natuurwetenschappelijk onderricht wordt besloten met:

*Zie je hoe ik je langs deze wegen bracht
Naar wat je weten wou. Ik wil je leren
Hoe je je doel bereikt op eigen kracht*

[Paradijs II, 124-126]

De huidige lezer mag op eigen kracht nadenken over het stukje spiegelloppervlak dat nodig is. In oppervlak is het omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de kaars. De 'hoeveelheid' licht die op een klein stukje oppervlak valt is óók omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de kaars. Samen: de hoeveelheid gereflecteerd licht per gebruikt stuk spiegelloppervlak hangt niet af van de afstand.

De intense belangstelling voor experimenten met licht, spiegels, optica en meetkunde zien we ook bij de Engelse filosoof/theoloog Robert Grosseteste (1168 – 1253) en diens leerling Roger Bacon, waarschijnlijk Dantes inspiratiebronnen hier. Grosseteste beschrijft het heelal als ontstaan uit een uiteenspattend punt van lichtenergie, waaruit door condensatie de hemelse sferen en de materie ontstaan, volgens de wetten van de meetkunde die in het Goddelijk Licht aanwezig zijn². Dantes *Divina Commedia* kan ook gelezen worden als één grote terugkeer naar dat kernpunt van Licht, dat hij in de laatste verzen van het Paradijs

inderdaad lijkt te gaan bereiken.

Onder de voorbijzwevende Dante en Beatrice is door Giovanni di Paolo nog de direct volgende terzine uitgebeeld:

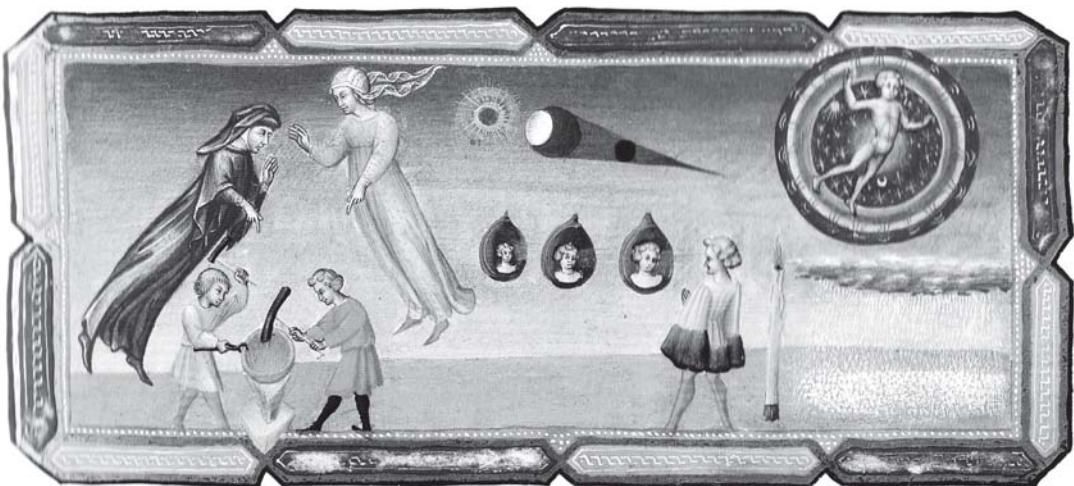
*De hemel moet zich laten inspireren
Door Gods gezanten tot zijn wenteling:
De hamer kan de smidshand niet ontberen.*

[Paradijs II, 127-129]

De natuur laat zich door ons onderzoek kennen, maar is voor Dante geen onafhankelijk opererend (materieel?) geheel.

de schepping van Beatrice

In 1292 schrijft Dante een bundel *canzona's* die hij zelf becommentarieert; het commentaar is autobiografisch en beschrijft zijn ontmoeting met Beatrice. In het fysieke vlak is er niet meer dan kijken van een afstand en één enkele groet. De meetkunde van het rechtlijnig gaande licht wordt gebruikt om Beatrice voorwerp te maken van de hoofse liefde op afstand:



Op een dag gebeurde het dat die allerliefste ergens zat waar woorden opklonken ter ere van de Koningin der glorie, en toevallig bevond ik me toen op een plaats vanwaar ik de bron van mijn zaligheid kon aanschouwen. En halverwege tussen haar en mij in rechte lijn zat een edele en zeer knap uitziende dame, die herhaaldelijk naar mij keek, omdat zij zich verbaasde over mijn blikken, die naar haar leken uit te gaan. Het gevolg daarvan was dat velen dat kijken van haar opmerkten. Het trok zelfs zozeer de aandacht dat ik, toen ik van die plaats wegging, vlakbij me hoorde zeggen: 'Kijk eens wat die vrouw in hem aanricht.' En toen men haar noemde, begreep ik dat men het over haar had die zich halverwege op de rechte lijn had bevonden die uitgaande van de allerliefste Beatrice eindigde bij mijn ogen. Toen ik dat merkte, voelde ik me zeer getroost door de overtuiging dat ik mijn geheim op die dag aan niemand door mijn blik had verraden.

[*Vita Nuova*, capitulo V,
vert. Frans van Dooren]

Beatrice is ook in 1265 geboren maar overlijdt vroeg, in 1283. De bewuste dame halverwege wordt later in de rond 1306 geschreven *Convivio* allegorisch gelijkgesteld aan de Filosofie, waarvan wetenschap een deel is. Beatrice krijgt tenslotte in de *Divina Commedia* de verheven rol van de Goddelijke Wijsheid. Halverwege de rechte lijn, de uitdrukking zou zo uit de *Elementen* van Euclides kunnen zijn gerold, maar duidt achteraf bezien op meer dan een zuiver geometrische bewering doet vermoeden.

wiskunde, de zekerheid halverwege

De cirkel zal de belangrijkste meetkundige structuur in de *Commedia* blijken te zijn, maar de cirkel komt ook al voor in de *Vita Nuova*. De jongeman waar hier naar gekeken wordt, is de in Dantes droom verschijnende Amor:

... En terwijl ik naar hem opkeek, leek het alsof hij vol deernis stond te schreien en wachtte tot ik een paar woorden tegen hem zou zeggen. Daarop vatte ik moed en sprak tot hem: 'O heer van alle adel, waarom huilt gij?', en hij antwoordde: 'Ego tamquam centrum circuli, cui simili modo se habent circumferentie partes; tu autem non sic.'³

[*Vita Nuova*, capitulo XII]

Deze bijna-definitie van de cirkel lijkt sterk op die in de *Elementen* van Euclides, maar wijkt er ook vanaf. 'Op gelijke wijze staan tot' is toch wat vager dan de gelijke afstanden die Euclides eist voor alle omtrekspunten naar het midden. Vermoedelijk kende Dante de klasieke bron van de meetkunde slechts indirect, via Roger Bacon of mogelijk via Boëtius (zesde eeuw, zeer door Dante vereerd) die een fragment ervan - gebrekking - vertaalde.

Meetkundig opmerkelijk is ook Dantes reactie bij de ontmoeting met zijn in 1147 gestorven voorvader Cacciaguida in de hemel van Mars:

*O voorzaat die nabij de Schepper leeft,
Gij ziet, zo simpelweg als wij ontwaren
Dat geen driehoek twee stompe hoeken heeft,*

*Al wat geschieden zal in later jaren
Door in het hoge Punt te schouwen waar
Zich toekomst en verleden openbaren.*

[Paradijs XVII, 13-18]

Euclides stelt dat twee hoeken van een driehoek samen altijd minder zijn dan twee rechte hoeken samen, dat is in feite de inhoud van zijn beroemde parallellenpostulaat. Zo'n postulaat was een absolute zekerheid waar je van uit kon gaan. De zekerheid van de grondwaarheden van de wiskunde is wel vaker in de *Divina Commedia* een afschaduwing van de zekerheid van het ware geloof dat de hemelingen bezielt. Aldus Beatrice over het hemels gadeslaan van mens en godheid in één:

*Om dat te zien wat hier slechts in vertrouwen
Door ons zonder bewijzen wordt aanvaard,
Zoals wij ook op axioma's bouwen.*⁴

[Paradijs II, 43-45]

We zullen later nog zien hoe Dante aan het eind van zijn visioen het niet oplosbare probleem van de klassieke meetkunde, de kwadraat van de cirkel, gebruikt om het tegelijk zien van mens en God in Christus te verbeelden.

verzen tellen

Hoe omvangrijk is de *Divina Commedia* eigenlijk?

Osip Mandelstam, de Russische dichter die vanaf 1933 wachtte om via de Lubjanka-gevangenis in Petersburg naar Siberië gebracht te worden, ging nooit de deur uit zonder een exemplaar van de *Divina Commedia* op zak. Dat was het enige dat hij absoluut zeker in het uiterste geval bij zich wou hebben. Hij noemde de *Commedia* een kristal met 13.000 facetten; een beeld dat de veelvlakminnende Ars-et-Mathesiaan toch moet aanspreken. Mandelstam stierf in 1937 in een kamp nabij Vladivostok, uitgeput door kou en ondervoeding. Hij had zijn Dante bij zich en in zich, Stalin niet.

14.266 is het exacte aantal verzen van het in drie cantica's (Hel, Louteringsberg, Paradijs) verdeelde werk. Elk van de drie cantica's omvat 33 canto's van variërende lengte, tussen de 115 en 160 verzen. Met het inleidende canto, waarvan we het begin zagen, dus 100 canto's in totaal.

De *Divina Commedia* is eigenlijk nog wel een laatmiddeleeuwse *Summa*, een opsomming van alle mogelijke kennis, maar Dante bouwt duidelijk ook aan een groot plan en is structureerbewust. Zo onderbreekt hij als het ware zijn eigen lange opsomming van de filosofen uit de oudheid die hij hoogacht, ter wille van de 'leesbaarheid' van het gedicht:

*Ze allen op te sommen valt te zwaar;
Ik word door een teveel aan stof gehinderd,
zodat ik u niet alles openbaar.*

[Hel IV, 145-147]

Dat is toch wel opmerkelijk voor de auteur die in de *Vita Nuova* voor de in de droom verschenen Amor een canzone schrijft en deze in het eigen commentaar in drie delen indeelt. De indeling is opmerkelijk: 14 verzen voor het eerste deel, 28 voor het tweede en 2 voor het derde deel.

Wie hier iets wil verklaren met $14 \times 2 = 28$ of iets anders oppervlakkigs, leg ik de indeling in 1, 5, 2 en 6 verzen van de volgende canzone van de *Vita Nuova* voor, met de extra mededeling dat drie of vier willekeurige getallen altijd wel een verband hebben.

tijd, wereldbeeld, cirkelbeweging

De wiskunde in de *Commedia* draait zoals gezegd in grote mate om de cirkel. Hel, Louteringsberg en Hemelse sferen, ze zijn alle drie

opgebouwd als een systeem van concentrische cirkels. De cirkel is hier nog steeds de basis voor allerlei sterrenkundige beschouwingen. Van begin tot eind van het werk vinden we ook veel breed uitgewerkte tijdsaanduidingen die met cirkeldraaiingen te maken hebben. Belangrijker voor deze inleiding is de datering van het visioen zelf. Dantes *Divina Commedia* situeert zichzelf namelijk heel nauwkeurig in de tijd:

*'t Was gister, vijf uur later dan dit uur,
precies twaalfhonderd zesenzestig jaren
Geleden dat de brug verdween; ...*

[Hel XXI, 112]

Precies 1266 jaar na de hellevaart van Christus zelf, die een grote ravage in de Hel aanrichtte. Dan is het dus Goede Vrijdag in het jaar 1300, want onze jaartelling start met het jaar 1 en Christus stierf in zijn 33ste levensjaar. Met een modern planetariumprogramma als *Skyglobe* vinden we dat in het jaar 1300 de zon op 13 maart de hemelevenaar noordwaarts passeerde, dat wil zeggen door het lentepunt ging. Het was daarna op dinsdag 5 april volle maan. Pasen valt volgens de regelingen van het Concilie van Nicea (in het jaar 325) op de eerste zondag na de eerste volle maan in de lente, in het jaar 1300 dus op 10 april. Dantes tocht door Hel, Louteringsberg en Paradijs begint daarom op de avond van Witte Donderdag, 8 april 1300, dat is verder gemakkelijk uit de verhaallijn van de eerste cantica op te maken. Dante laat zelf de Volle Maan overigens in de nacht na Witte Donderdag schijnen, want op paaszaterdagochtend wordt genoteerd:

Het was gisterennacht reeds volle maan.

[Hel XX, 127]

Dantes detailkennis van het hemels uurwerk gaat veel verder dan uit dit voorbeeld blijkt. Lees bijvoorbeeld hoe Beatrice haar betoog over de structuur van de hemelsferen besluit met een snier naar de aardse onnozolen:

*.. Voordat de lentezon daar zal gaan stralen
In januari, door een misverstand
In jullie telling ..*

[Paradijs XXVII, 142-144]

Dat is de vertaling van Ike Cialona en Peter Verstegen, die de terzinen-structuur intact laat, maar daardoor soms wel minder exact is dan de dorre prozavertaling van Frans van Dooren:

*Maar voordat januari helemaal buiten de
winter komt te vallen doordat men daar
beneden die paar minuten heeft
verwaarloosd,*

Dante was dus bekend met het feit dat het begin van de lente door een onnauwkeurige benadering van de jaarlengte in de Juliaanse kalender steeds meer naar januari verschoof. Net als hij bekend was met het feit dat het lentepunt zich over de ecliptica verplaatst met een snelheid van ongeveer een graad per eeuw. Welke dichter van nu weet dat? En wie zou er in 's hemelsnaam aldus de leeftijd van zijn inigste geliefde mee beschrijven:

*Zij had al zolang deel uitgemaakt van dit
leven dat de sterrenhemel een twaalfde graad
naar het oosten was opgeschoven, zodat ze
mij ongeveer in het begin van haar negende
levensjaar verscheen en ik haar ongeveer aan
het eind van mijn negende zag.*

[Vita Nuova, capitulo II]

In ons moderne wereldbeeld beschrijft de aarde jaarlijks een bijna-cirkelvormige ellipsbaan om de zon, de aardas maakt daarbij een vaste hoek van 23°26' ten opzichte van de loodlijn op het vlak van de aardbaan en wijst heden ten dage naar wat wij de Poolster noemen. Nauwkeurig en langdurig observeren wijst uit dat de aardas zelf een draaiende beweging maakt óm die loodlijn. De aardas beweegt zelf als de as van een tol in een periode van 25770 jaar rond, wel steeds de hoek van 23°26' met de loodlijn op de baan aanhoudend. Dat geeft een lentepuntverschuiving van 1°24' per eeuw. De 1° per eeuw wordt door Dante ook vermeld in de *Convivio*, waar veel sterrenkunde in voorkomt. Dante verraadt daarmee zijn afhankelijkheid van Ptolemaeus (85-165 na Christus), die met zijn *Almagest* de standaard voor de sterrenkunde tot aan Copernicus had gezet. Ptolemaeus geeft de waarde van 1° per eeuw, en verwerpt de eerder gegeven waarde van 2° over een periode van 165 jaar, zijnde de tijd tussen de observaties van Timocharis in 294 en die van Hipparchus in 129 voor Christus. Hipparchus zat met zijn 1°16' per eeuw veel dichter bij de tegenwoordig aangenomen waarde!

Ik wil de lezer bij monde van Beatrice later het Ptolemaeïsche wereldbeeld betreffende de beweging van maan, zon en planeten voorleggen maar zie af van een Ptolemaeïsche beschrijving van de verschuiving van het lentepunt. Wat de seizoensbeweging betreft nu wel dit langere fragment:

*Wil, lezer, een moment mijn ogen lenen
En zie de grote wielen die zich daar
Hoog in de hemel korte tijd verenigen.*

*Zie deze schepping van de Kunstenaar,
Die Hij zo liefheeft dat Hijzelf Zijn ogen
Geen ogenblik laat afdwalen van haar.*

*De ene cirkel is schuin afgebogen:
Zo geven de planeten, zon en maan
De aarde wat zij vraagt, naar hun vermogen.*

*Had deze cirkel niet een schuine baan,
Dan was de hemel machteloos gebleken
En zou op aard geen levenskracht bestaan;*

*En als die baan niet zo was afgeweken,
Dan zou op beide helften van de aard
Een groot deel van de ordening ontbreken.*

*Blijf rustig zitten, lezer. Denk bedaard
Aan wat ik u als voorproefje liet weten,
Opdat het u verheugt, en niet bezwaart.*

*De spijs is opgediend; u mag haar eten.
Het wordt weer tijd dat ik mijn zorg besteed
Aan wat mij als mijn taak is toegemeten.*

*De zon, die als de krachtigste planeet
Haar invloed op de aarde neer laat stromen,
Waar men de tijd aan haar beweging meet,*

*Had afscheid van de evenaar genomen
En wentelde nu in de schroeflijn rond
Waar in ze daaglijks eerder op zal komen.*

[Paradijs, X, 1-21]

Welke schroeflijn wordt daar bedoeld?

Dante ziet, net als wij zouden doen als we de positie van de zon traceren op de bol, die de vaste sterren lijkt te dragen en als geheel ronddraait in 23 en 14/15 uur, dat de zon een ei-

gen beweging maakt over een cirkel, die licht schuin staat ten opzichte van de evenaar van de sterrenbol, juist in een hoek van $23^{\circ}26'$. De zon beweegt in een jaar langzaam over deze cirkel tegen de oost-west draaiing van de sterren in. De zon maakt in totaal zodoende een eigen, juist iets tragere beweging, waardoor onze zonnedagen precies 24 uur duren. In de *Convivio* verplaatst de praktische onderwijzer Dante ons ook nog naar de Noordpool; daar ligt de hemelevenaar in het verlengde van de horizon en het gevolg is dat de zon, die vanaf het lentepunt langzaam schuin omhoog gaat, als totaalresultaat een stijgende spiraal beschrijft, stijgend richting Zenith, om na 91 dagen weer via een spiraal af te dalen naar de horizon.

Complex, inderdaad, en Dante vertelt het allemaal zonder illustraties. Ter aanvulling toont Ptolemaeus ons in de illustratie hiernaast zijn *armillarium*, een hemelbol met ecliptica of zonnebaan. Hij houdt zijn kosmosbeeld liefdevol tegen de wang, als was het een kind dat wild ronddraaiend in de nacht is ontwaakt en getroost moet worden. Uit de kathedraal van Ulm in Zuid Duitsland, rond 1470, van Jörg Syrlin (Ulm is ook nog de geboortestad van Albert Einstein).

Twee belangrijke kenmerken van het Ptolemaeïsche systeem zijn nu al genoemd: de aarde staat stil in het middelpunt van het heelal en alle bewegingen aan de hemel worden beschreven met behulp van regelmatige cirkelbewegingen. Deze sterrenkunde probeert niet die bewegingen te *verklaren*, maar wel ze zo perfect mogelijk overeenstemmend met de waarnemingen met puur geometrische middelen te *beschrijven*.

Ik noemde zoëven het ‘hemels uurwerk’, het idee dat de kosmos een systeem is dat met een klok met tandwielen vergeleken kan worden. Als eerste bedenker van deze metafoor wordt vaak Kepler aangewezen.⁵ Maar hier is Dante:

*Als wij een raderuurwerk bestuderen,
Blijkt van één rad de snelheid maar gering,
Terwijl een ander sneller zal roteren;*

*Zo mat ik aan de vaart der werveling
Hoe gelukkig deze kringen waren,
Daar ieder in zijn eigen tempo ging.*

[Paradijs XXIV, 13-18]

De kringen der gelukzaligen, dat zijn de bewegende hemelsferen.



Als de aarde midden in het heelal staat, dan is het middelpunt van de aarde het werkelijke middelpunt van het heelal. Dantes Hel begint vlak onder het aardoppervlak en reikt tot het middelpunt van de aarde.

Kom, lezer, ga mee naar de diepten van de Hel, om dan uiteindelijk bij de hoogste sterren te geraken!

Aad Goddijn

noten

1. De vertalingen van de fragmenten uit de *Divina Commedia* komen, tenzij anders vermeld, uit de vertaling van Ike Cialona en Peter Verstegen, Athenaeum-Polak & Van Gennep, Amsterdam 2000. Deze is rijmend met behoud van de originele terzinenstructuur; soms is daardoor wel wat nauwkeurigheid geofferd. Op enkele plekken is dat hier aangegeven.

2. Meer over Optica en Perspectief in de dertiende eeuw in Umberto Eco, *Kunst en schoonheid in de middeleeuwen*, Bert Bakker, Amsterdam 1989.

3. ‘Ik ben als het middelpunt van een cirkel, tot hetwelk zich alle delen van de omtrek in gelijke mate verhouden; gij zijt echter niet zo.’

4. De vertaling is ritmisch goed, maar inhoudelijk matig. De 3e regel luidt in het Italiaans: *a guisa del ver primo che l'uom crede*. Dus eigenlijk: *zoals de mens gelooft in een grondwaarheid*, waarin het contrast tussen de hemelinge Beatrice en de aardse mens duidelijker is.

5. In een brief aan Johann Georg Herwart von Hohenburg van 10 februari 1605.

ideeën voor een tentoonstelling

Eind volgend jaar viert Ars et Mathesis het 4^e lustrum. Ter gelegenheid daarvan bereiden wij in samenwerking met het Mondriaanhuis, het museum voor constructieve en concrete kunst te Amersfoort, een tentoonstelling voor. Het zal een combinatie worden van exposities van relaties van het Mondriaanhuis en kunstenaars uit de kring van Ars et Mathesis, waarbij uitdrukkelijk ruimte zal zijn voor nieuwe ontwikkelingen en educatieve aspecten.

Van onze kant zijn bij de voorbereiding betrokken de bestuursleden Henk van Tongeren, Aad Goddijn en Aad Dijkxhoorn. Wij zijn van plan om in de komende maanden het programma nader uit te werken en kunstenaars en financiers te benaderen.

Mocht u suggesties hebben, aarzel dan niet om ons hierover te informeren!

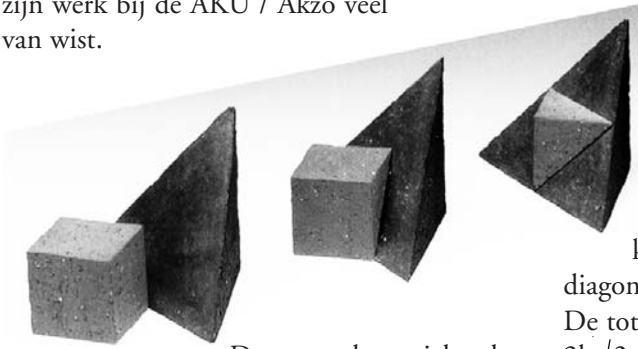
Aad Dijkxhoorn

muzikale manifestaties

Scheidend bestuurslid Albert van der Schoot is deze zomer betrokken bij twee manifestaties op muzikaal gebied: van 12-16 augustus werkt hij mee aan een cursus in Leusden (‘Le bon goût’) over muziek in de Franse Barok (zie de website van de ISvW: www.isvw.nl), en op 31 augustus/1 september aan een conferentie in Amsterdam (‘Redefining Musical Identities’) over veranderingen in de muziek in de 21e eeuw (zie de website van de ASCA: www.hum.uva.nl/asca).

verschuivende kubus

Mijn vader, Dr Bart Paul Jibben (1922 - 2001), was chemicus van beroep. Na zijn pensionering is hij zijn artistieke talenten meer gaan ontplooiën. Edelsmeedwerk, tekenen en vooral keramiek. In het edelsmeedwerk werden als het zo uit kwam ook verschillende kunststoffen (plastics) verwerkt, waar mijn vader dankzij zijn werk bij de AKU / Akzo veel van wist.



De meeste keramiekstukken die hij heeft gemaakt zijn figuratief: katten, beren, mensen, koppen, gevels van oude huizen, om maar eens wat te noemen. Maar sommige keramisch werk is non-figuratief, onder meer de hier afgebeelde reeks 'De verschuivende kubus' waar papa erg trots op was.

Het kunstwerk bestaat uit vijf momentopnamen van een verplaatsing van een kleine kubus door een schuin afgesneden grote kubus. De kleine kubus heeft ribben met een lengte k . De diagonalen van de zijvlakken hebben dan een lengte $k\sqrt{2}$. De grote kubus heeft ribben die tweemaal zo lang zijn ($2k$). De kubus is schuin afgesneden door een plat vlak dat door drie hoekpunten gaat. Een van de diagonalen

van het grondvlak van de kubus is er nog (lengte $2k\sqrt{2}$), de andere diagonaal is gehalveerd: lengte $k\sqrt{2}$. Het grondvlak van de kleine kubus past dus precies in het gehalveerde grondvlak van de grote kubus doordat een diagonaal van

het grondvlak van de kleine kubus even lang is als de halve diagonaal van het grondvlak van de grote.

De totale verplaatsing van de kleine kubus is $2k\sqrt{2}$. De eerste momentopname laat de kubussen zien voordat de kleine kubus aan zijn tocht begint. De navolgende momentopnamen zijn genomen steeds na een vierde deel van de verplaatsing (stapgrootte $\frac{1}{2}k\sqrt{2}$). Aan het eind is de kleine kubus er precies doorheen gekomen.

Je moet er maar op komen. En daarna moet je het ook nog kunnen maken. Dat laatste was mijn vader wel toevertrouwd. Wat betreft het eerste: dat was hem klaarblijkelijk ook toevertrouwd, maar ik besef nu dat ik papa eigenlijk nooit heb gevraagd hoe hij op het idee gekomen is om dit kunstwerk te gaan maken.

Carel Jibben

wobbelingen

In Arthesis nr. 1 van jaargang 15 schrijft Hans de Rijk over zogenaamde 'wobbelingen'. Uitgedaagd en met behulp van de door hem gegeven uitslagen lukte het mij (zij het met enige moeite) een papieren model van zo'n wobbelding te maken. Of de beloofde 'dronkemansgang' die mij in het vooruitzicht was gesteld ook werd bereikt zal ik maar in het midden laten: gewicht, structuur van de ondergrond en hellingshoek waren drie variabelen die, mits in de juiste verhouding, het beoogde effect vermoedelijk wel zullen bereiken. Vermoedelijk, omdat ik al prutsend en experimenterend be-

dacht dat ik zo'n wobbelding al zeker een tiental jaren in de kast had liggen. De beleggingsinstelling Robeco heeft namelijk in de jaren tachtig (hun gouden jubileum?) een 'kleinood' aan haar deelnemers cadeau gedaan, waarvan bijgaand een tweetal foto's. Het bestaat uit twee metalen half cirkelvormige figuren, die in het midden aan elkaar zijn bevestigd en die onderling 90° t.o.v. elkaar kunnen worden gedraaid. In eerste aanleg is het een halssieraad; zonder koordje en 'gedraaid' is het een perfect wobbelding. Uit een en ander blijkt ook dat het wobbelen feitelijk berust op de aanwezigheid van de twee halve cirkels en dat de halve kegels in het ontwerp van Hans de Rijk slechts de functie hebben om deze halve cirkels 'overeind' te houden.

Koos van der Werff



boekbespreking: nog meer scherven

Op de Ars et Mathesisdag in 2000 hebben we onder andere gesproken over getallensymboliek bij Bach. Een maand daarvoor vond, eveneens in Utrecht, de promotie plaats van Thijs Kramer, op het proefschrift *Zahlenfiguren im Werk Johann Sebastian Bachs* (ISBN 90-393-2530-8). In dat boek komen we ook de, in het artikel ‘Contrasubjectief’ elders in deze Arthesis genoemde, bokaal van de familie Krebs weer tegen (zie pag. 4 e.v.), en kunnen we lezen welke tekst erin is gegraveerd (Kramer pag. 53):

*theurer Bach
ruffet, Ach!
hofft auf Leben
So du ihnen nur kanst geben
Drum erhör ihr sehnlich ach!
Theurer Bach.*

Niet direct een indrukwekkend gedicht: het klinkt niet soepel en ziet er geconstrueerd uit. En dat is het misschien ook wel. In het proefschrift van Kramer wordt een interpretatie aangehaald die alleen maar te begrijpen is als ook de noten uit de inscriptie (zie de afbeelding bij ‘Contrasubjectief’ op pag. 6) erbij betrokken worden: een duizelingwekkend staaltje ars et mathesis.

Op de bovenste drie notenbalken vinden we precies de twaalf tonen van het octaaf terug. Daarbij geeft, zoals in het artikel wordt beschreven, de bovenste regel het Bach-motief. Op de onderste notenbalk wordt dat motief herhaald. De notatie is in de sopraansleutel, dus met de centrale c op de onderste lijn van de notenbalk. Op de tweede balk staan de noten g-gis-f-fis. Dat is hetzelfde motief, maar

dan van achter naar voren gespeeld, dus de ‘kreeft’ van het motief. En van wie kreeg Bach dat glas ook weer?

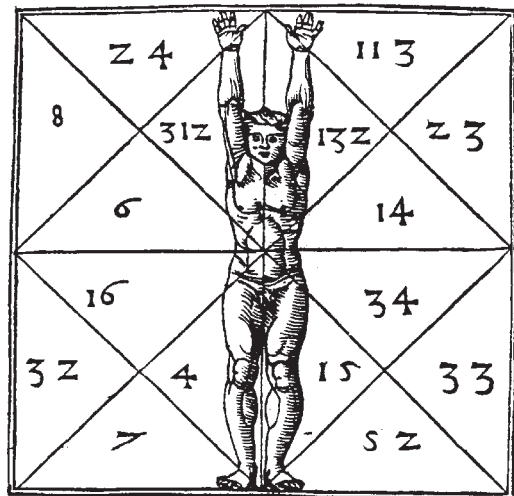
De begintoon van die kreeft is de g. Waarom? Dat is wat ingewikkelder. Uit de omgeving van Bach zijn er voorbeelden die er op wijzen dat het in die kringen niet ongebruikelijk was in teksten getallen te ‘verstoppert’, volgens de rangorde van de letters in het 24-letterige alfabet (waarbij i = j = 9, en u = v = 20). De naam ‘Bach’ levert dan het getal 14 op: $2 + 1 + 3 + 8 = 14$. Dat getal 14 is op opvallend veel manieren in Bachs composities terug te vinden (als aantal tonen van een thema, als aantal maten van een fragment, als aantal inzetten etc.), en kan dus geïnterpreteerd worden als een soort watermerk waarmee Bach zijn stukken signeerde. Als we de muzikale notatie van de tweede regel volgens het zelfde systeem lezen, vinden we voor de som van de acht letters van het motief g-gis-f-fis het getal 80. Dat lukt alleen als het motief op g begint. Maar 80 is ook het getal dat we vinden voor de naam van J. T. Krebs (= Johann Tobias Krebs), die zichzelf zodoende op ingenieuze wijze met het motief van zijn leermeester heeft versmolten. Tenminste, als deze interpretatie klopt - de getallen zijn er niet bij gegraveerd! De beginregel ‘theurer Bach’ levert een totale letterwaarde van 105 op, en dat is het *veertiende* driehoeksgetal (anders gezegd: de som van de getallen 1 t/m 14). Of er voor elke andere regel op zich ook zo’n dubbele betekenis te achterhalen is wordt uit het boek niet duidelijk,

maar de som van de letterwaarden van alle regels, inclusief de zestien notennamen, levert 1076 op. In het Griekse alfabet, waarin de letters volgens een andere conventie eveneens een getalswaarde vertegenwoordigen, is dat het totaal van de letterwaarden van het woord *tesereskaideka* - en dat is weer het woord voor het getal 'veertien'.

Vergezocht? Dat lijkt me wel het minste wat je hiervan kunt zeggen. De vraag is echter: door wie? Is het alleen door twintigste eeuwse interpretatoren met een rijke artistieke fantasie zo ver gezocht, of ook door Bach, Krebs en andere intellectuelen uit de late Barok? Je zou verwachten dat Kramer alles op alles zou zetten om dat te achterhalen, om het kaf van het koren te scheiden en duidelijk te maken wat er nu in de Barok wel en wat er niet behoorde tot de praktijk van het artistiek verwerken van getallen. Maar daar stelt het boek ons in teleur. Naast de bokaal van de familie Krebs zijn er wel meer voorbeelden waar beslist perspectief in zit, maar Kramer doet geen enkele poging ze met elkaar in verband te brengen om zo tot een historisch getrouw beeld te komen van de muzikale 'ars et mathesis'-praktijk in de Barok. In plaats daarvan worden ons allerlei berekeningen en figuren voorgetoverd, waarvan een flink aantal niets met Bach en zijn tijd te maken heeft. Dat geldt bijvoorbeeld voor nevenstaand magisch vierkant (als je het zo mag noemen) van Agrippa von Nettesheim, dat met cijfers en al in diens *De occulta philosophia* van 1533 is overgeleverd, maar waarvan niemand eigenlijk begrijpt waar die cijfers op slaan (en Agrippa legt het niet uit). Sommige van de duidingen die Kramer geeft zijn mogelijk interessant, andere voegen alleen maar nieuwe

raadsels toe. Wat moeten we aan, bij de bespreking van deze figuur, met een mededeling als: 'de getallen 632 [de som van de acht bovenste getallen], 409 [de som van de acht linkse getallen] en 416 [de som van de acht rechtse getallen] eindigen met een kwadraat of derde macht' (pag. 71)? Dat 9 en 16 kwadraten zijn begrijp ik, maar van welk getal is 32 dan wel de derde macht? En zelfs als er zo'n getal zou zijn: *so what?* Zolang Kramer niet duidelijk maakt waarom het van belang is dat door hem zelf geselecteerde deelgetallen van een deelverzameling van de deelsommen van zo'n magische figuur een tweede of derde macht vormen, zijn dit volstrekt loze wiskundige waarheden, waarvan er zonder moeite vele karrevrachten over de pagina's van zo'n boek kunnen worden uitgestort.

Met wat meer moeite kun je zulke cijfercombinaties met elkaar in verband brengen. Dat gebeurt dan ook, maar het is voortdurend een verrassing aan welke getallencombinaties in de volgende regels betekenis zal worden toegekend. Zo telt Kramer de aantallen maten van



Bruno's column

Sinds begin van dit jaar verschijnt op onze website (zie pag. 35) ongeveer maandelijks een column van Bruno Ernst. Een reden te meer om geregeld een bezoekje aan de site te brengen.

het eerste deel van Bachs Wohltemperiertes Klavier per acht preludia en fuga's bij elkaar op, maar het eerste getal waar hij vervolgens betekenis aan toekent (pag. 92) is de som van de aantallen maten van de laatste zes (en dus niet de laatste acht) fuga's. Die som is 374, en kijk eens aan: dat is gelijk aan 17×22 , en WTK 1 stamt uit 1722.

Van iemand die op deze wijze met de rekenkunde en haar geschiedenis omgaat mag het ons niet verbazen dat hij meent dat Albrecht Dürer met Luca Pacioli en Leonardo da Vinci 'tot de belangrijkste wiskundigen na Fibonacci

wordt gerekend' (pag. 67/68). Dürers bekende magische vierkant (op zijn *Melencholia I* uit 1514) is een authentiek stukje ars et mathesis uit de Renaissance, maar om een belangrijk wiskundige te worden moet je toch echt wel wat meer hebben gepresteerd. Dat had zelfs Leonardo niet: zijn roem geldt een scala aan vaardigheden, maar een belangrijk wiskundige was hij zeker niet. Maar voor wie houdt van het spelen met getallen is er aan zo'n boek nog best wat plezier te beleven, en een Kruidvat-CD'tje op de achtergrond is daarbij nooit weg.

Albert van der Schoot

terugtrek van een steunpilaar

In 1993 schreef Albert van der Schoot al in Arthesis over : 'De schepping als mathematisch kunstwerk' en op de novemberdag van datzelfde jaar behandelde hij 'de platonische hemellichamen'. In een serie artikelen rond Hofstadter wist hij ons met zijn visie daarop te verrassen. Hij heeft zich bijzonder ingezet voor de verbetering van de kwaliteit van Arthesis: zowel uiterlijk als inhoud kregen onder zijn redactie een wezenlijke impuls. Ook als medeorganisator van de novemberdagen heeft Bert een grote inbreng gehad. Kortom, al jaren een steunpilaar voor Ars et Mathesis. Hij heeft te kennen gegeven het bestuur aan het eind van dit jaar te willen verlaten. Dit spijt ons ten zeerste, maar we hopen toch nog af en toe een bijdrage van hem te mogen lezen in Arthesis en van hem te horen op de jaarlijkse Ars et Mathesisdag. Voor alles wat hij in de loop der jaren aan de bloei van Ars et Mathesis heeft bijgedragen zegt het bestuur hem recht hartelijk dank!

namens het bestuur, Henk van Tongeren

donateursbijdrage

Verzoek aan alle donateurs die dat nog niet gedaan hebben, om hun jaarlijkse bijdrage over te maken. Zie verder het informatie kader op pag. 35. Vergeet niet naam en adres te vermelden!



De Stichting ARS ET MATHESIS (opgericht in 1983) heeft tot doel de belangstelling te bevorderen voor kunst die zijn inspiratie vindt in de wiskunde. Dit gebeurt onder meer door tentoonstellingen, publicatie van boeken en artikelen, het uitgeven van het blad 'ARTHESIS' en het organiseren van een jaarlijkse ARS ET MATHESISdag (diverse voordrachten gecombineerd met een dag-expositie waar werk van velerlei exposanten is te bekijken).

donateurs: Donateurs (minimum donatie € 15,- per jaar) ontvangen Arthesis en hebben gratis of tegen gereduceerd tarief toegang tot de jaarlijkse Ars et Mathesisdag. Bijdragen kunnen worden overgemaakt op bankrekening nummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn; s.v.p. met duidelijke vermelding van eigen naam en adres, en van 'Ars et Mathesis'.

inlichtingen: H.P. van Tongeren
Beverodelaan 205, 6952 JH Dieren
tel. 0313-413307; email: toosenhenk@planet.nl

secretariaat: A. Goddijn
p/a Freudenthal Instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
email: A.Goddijn@fi.uu.nl

aanmelding als donateur, adreswijzigingen, bestellingen:
Ineke Lambers
Noorderkroon 77, 9301 JW Roden
tel. 050-3601301; email: ilambers@wxs.nl

Internet: <http://www.arsetmathesis.nl>

Ars et Mathesisproducten

verkrijgbaar: Sangaku-kwartet [sk], Sangaku-poster A3 of A4 [sp], Sangakulelikaart [slk], Sangaku-lelieposter A3 of A4 [slp]: nederlands of engels [n of e]; A&M poster A3 of A4 [amp], A&M knoop-kaart [amkk], A&M letterkaarten [amlk], losse nummers Arthesis vanaf jaargang 14 [art/jaargang/nr]; set van 2 verzamel posters 'A&M-kunst' op hoogglanspapier A3 of A4 [vp].

prijzen: kaarten (set van 4) € 5, poster A4 € 2,50, poster A3 € 6, nummers Arthesis € 3,50; voor toezending A3 posters plus € 2,50, overig plus € 1,20; set van 2 posters vp: A3 € 14/toezending € 5, A4 € 8/toezending € 2.

bestelwijze: door overmaken van het totaalbedrag op giro nr 1315269 t.n.v. J.J. Lambers-Hacquebard, onder vermelding van: 'AM-bestelling', gewenste aantallen en soorten producten en het adres waar de bestelling naar toe moet worden gezonden. Gebruik s.v.p. de hierboven tussen [] vermelde codes.

