

# Arthesis

Mededelingenblad  
van de Stichting  
**Ars et Mathesis**

redactieadres:  
Nieuwstraat 6  
3743 BL Baarn

jaargang 10  
nummer 2  
mei 1996

---

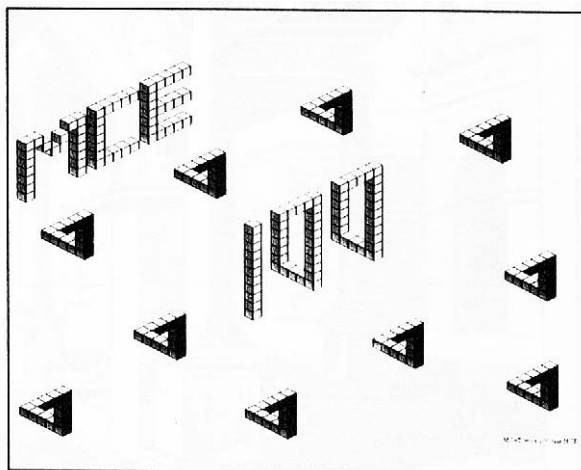
## 100 JAAR M.C. ESCHER

---

In 1998 is het honderd jaar geleden dat de Nederlandse graficus Maurits Cornelis Escher werd geboren. Zijn werk wordt vandaag de dag nog steeds door jong en oud gewaardeerd. Escher heeft dan ook vele verschillende, fascinerende werken nagelaten. Al in de dertiger jaren werd hij gezien als een uitzonderlijk talent. Na bezoeken aan onder andere Granada, Sevilla en Cordoba wist hij de indrukken die hij daar opdeed te transformeren tot indrukwekkende kunstwerken.

Omdat het werk van MCE zich ook in de kring van onze donateurs in een grote belangstelling mag verheugen, is hieraan gedurende de afgelopen jaren in Arthesis regelmatig aandacht besteed. Zo kwamen bijvoorbeeld aan de orde:

- Amphografie, een manier van tekenen waarbij elke grenslijn tussen twee figuren zowel tot de ene als de andere figuur behoort (een typische Escher-tekenwijze).
- Dimensies in het werk van Escher.
- Verschillende alfabetten gebaseerd op de letters MCE, waarmee hij zijn prenten signeerde.
- De trap van Penrose als animatie.
- Onmogelijke driebalken.
- Regelmatige vlakvullingen.



Ars et Mathesis wil 1998 niet ongemerkt voorbij laten gaan. Het is de bedoeling om met name op de Novemberdag van dat jaar extra aandacht te besteden aan Escher. We denken hierbij bijvoorbeeld aan werk van onze donateurs dat op een of andere manier aan Eschers werk is gerelateerd. We vernemen dan ook graag wie van onze donateurs in dat kader activiteiten zou willen ontwikkelen.

### ESCHER INTERACTIEF

Onder deze titel is zeer recent een CD-ROM uitgebracht, rijkelijk gevuld met negen modules die ieder een ander aspect van Eschers kunst onthullen. In een volgend nummer leest u meer over de CD-ROM. (ISBN 90 229 3932 4 - prijs fl 119,90 - verkrijgbaar in boekhandel, computershop en warenhuis.)

---

## EEN CRITERIUM VOOR DE “NATUURGETROUWHEID” VAN EEN AFBEELDING(SMETHODE)

---

De tactiele wereld is voor mens en dier primair. Onze gezichtszin (biologisch-evolutionair) staat in dienst van onze tactiele ervaringen en verlangens. De visuele wereld heeft natuurlijk een geheel eigen structuur, waarvan wij ons past bewust worden als we er ons uitdrukkelijk op concentreren; als we deze gaan scheiden (voor zover mogelijk) van de tactiele realiteit.

Die visuele wereld is echter geen constante: het is de projectie van wat ons brein uit de input van het netvliesbeeld en de in het brein opgeslagen informatie in ons bewustzijn brengt. Het is een “breinbeeld” dat van individu tot individu, van cultuur tot cultuur, van tijdperk tot tijdperk, etcetera, verschilt.

In onze tijd en cultuur zijn wij gewend ons breinbeeld te conformeren aan afbeeldingen in klassieke perspectief. Hoe weinig vanzelfsprekend dit is blijkt uit een opmerking die we in de rond 1460 geschreven verhandeling van de Florentijnse kunstenaar Filarete vinden. Hij heeft het tegen lezers die maar niet willen zien, dat van ons af lopende evenwijdige lijnen naar elkaar toe schijnen te lopen, convergeren:

*“Als U dit duidelijker wilt zien, neem dan een spiegel en kijk er in. En U zult duidelijk zien dat het zo is. Terwijl ze (de hoeklijnen van een kamer) U zonder spiegel evenwijdig toeschijnen.”*



*figuur 1: perspectivische constructie van Hans Vredeman de Vries (1695); beeldhoek iets groter dan 90°*

### **Klassieke perspectief**

De populariteit van de klassieke perspectief als afbeeldingsmethode in onze cultuur is zonneklaar. Bijna vijf eeuwen lang is alles op deze manier afgebeeld. De fotografie, ook in de vorm van film en TV, heeft er voor gezorgd dat ons breinbeeld “klassiek-perspectivistisch” geconformeerd is.

Na het aanvankelijke enthousiasme over de nieuwe wijze van afbeelden kwam er ook kritiek. Leonardo da Vinci liet al zien dat de perspectivische afbeelding aan de randen steeds sterkere deformaties van het afgebeelde vertoonde: alles werd in de breedte uitgerekt, zodat de afbeelding beperkt moest worden tot een

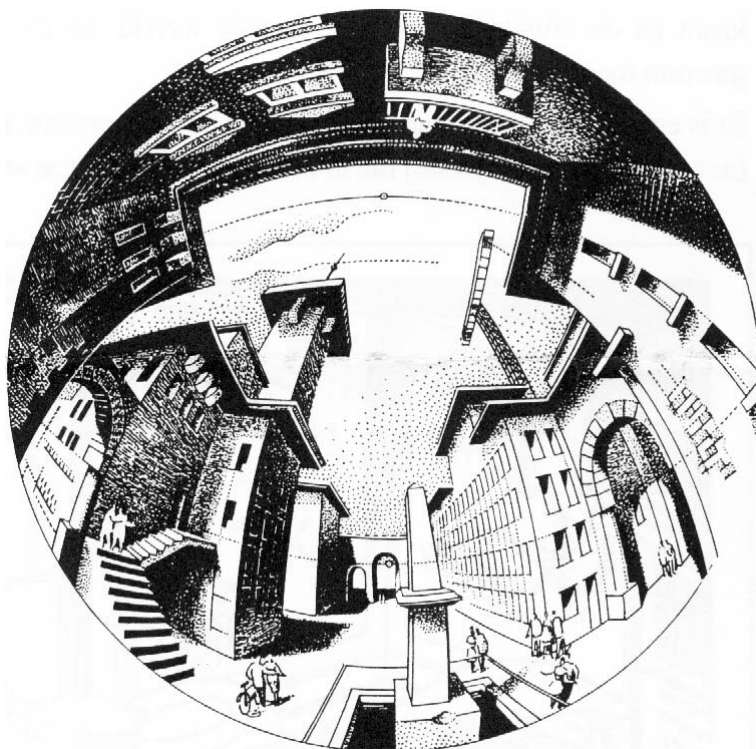
gezichtshoek van ca 40°. Pas in de 20-ste eeuw kwam men tot het inzicht dat de perspectivische afbeelding niet zonder meer de *natuurlijke* afbeelding genoemd kon worden en dat de klassieke perspectief veel meer één van de middelen was om de visuele wereld op een geordende en coherente manier weer te geven. Het werd gezien als een middel waarbinnen het compositorische spel van de schilder gespeeld kon worden.

De Franse perspectivist Albert Flocon verwoordde dit in zijn boek over zijn nieuwe afbeeldingsmethode als volgt:

*“Ik ontdekte zelf (anderen hebben dit ongetwijfeld reeds lang geleden ontdekt) dat de klassieke perspectief door haar logische ordening een voortreffelijk principe voor de compositie is. Want het is een bouwdoos, ontworpen voor het platte vlak.....” (1986).*

### De afbeeldingsmethode van Flocon

Flocon zocht naar een afbeeldingsmethode die de randvervormingen van de perspectief niet vertoonde en bovendien meer recht zou doen aan onze waarneming. Het is namelijk zo, dat in vlakken evenwijdig aan het tafereel alle evenwijdige lijnen evenwijdig blijven, terwijl ze toch steeds verder van ons aflopen. Staan we recht voor een hele lange muur, dan zien we dat de hoogte van de muur recht tegenover ons veel groter is dan links en rechts in de verte. De begrenzende lijnen van de muur zien we dus als kromme, naar elkaar toelopende lijnen en niet als evenwijdige lijnen. Om zijn doel te bereiken projecteerde Flocon de omgeving eerst op een halve bol (het oog in het middelpunt van de bol); daarna werd die halve bol zó op het vlak weergegeven dat de hoekafstanden zo veel mogelijk overeenkwamen met die op het vlak. Door middel van een meetkundige constructie (die niet zoveel ingewikkelder is dan die van de klassieke perspectief) kon hij het beeld rechtstreeks op het platte vlak aanbrengen, zonder tussenkomst van een bol. Het beeld was nu niet beperkt tot een beeldhoek van ca 40°, maar strekte zich zowel horizontaal als verticaal uit over 180°. Wat direct opvalt is dat de meeste rechte lijnen als cirkelbogen worden weergegeven. (Figuur 2)



figuur 2: Plein - afbeeldingsmethode van Albert Flocon (1986)

### Kiezen

Flocon claimt voor zijn afbeeldingsmethode een grotere natuurgetrouwheid: ze komt meer overeen met onze waarneming.

Op het eerste gezicht is dat zeker niet zo, want er is waarschijnlijk niemand die een breinbeeld produceert met al die kromme lijnen. Flocon wijt dit aan onze gewenning aan afbeeldingen in klassieke perspectief. Vóór de uitvinding daarvan zag men zijn omgeving anders. Men zag toen ook niet dat evenwijdige lijnen elkaar naderden naarmate ze zich van ons verwijderen (zie bovenstaand citaat van Filarete).

In feite vraagt Flocon ons om ons breinbeeld aan zijn afbeeldingsmethode aan te passen, omdat:

- het een zeer grote gezichtshoek met weinig vervormingen kan weergeven;
- het recht doet aan onze ervaring dat wij de dingen kleiner zien naarmate ze verder van ons weg staan, ook al bevinden ze zich in een vlak evenwijdig aan het tafereel.

Als wij proberen een zo objectief mogelijke keuze te maken, moeten we een uitgangspunt vinden om afbeeldingsmethoden (er zijn er nog veel meer dan die hier ter sprake komen!) met elkaar te vergelijken. We komen nu terug op het begin van dit artikel: de tactiele wereld is primair; de visuele wereld is secundair en helpt ons onze leefwereld (die in wezen tactiel is) enorm uit te breiden.

*We stellen nu dat een afbeelding beter is, naarmate ze meer recht doet aan het ervaren van de tactiele wereld.*

In de tactiele wereld heeft een voorwerp onveranderlijke afmetingen, of het nu dicht bij ons is of veraf. Ons breinbeeld bevestigt dit (ondanks gewenning aan perspectivische afbeeldingen) in vele gevallen. Ziet U bijvoorbeeld de stoelen in uw huiskamer kleiner naarmate ze verder van U afstaan? Of ervaart U dat Uw vrouw groter wordt als ze de deur binnenkomt en op u afloopt?

In de tactiele wereld blijven evenwijdige lijnen altijd evenwijdig. Ook hier is Uw breinbeeld in overeenstemming met de tactiele ervaring: U moet Uw best doen om “te zien” dat de kanten van een tafel naar elkaar toe lopen.

De klassieke perspectief bevat dus elementen die in tegenspraak zijn met onze tactiele ervaring.

De afbeeldingswijze van Flocon brengt ons nog verder van de tactiele ervaringswereld: rechte lijnen worden krom en de afwijkingen van de tactiele wereld die de normale perspectief heeft worden in zijn systeem gewoon meegenomen.

Er is echter een afbeeldingswijze die veel beter overeenkomt met onze tactiele ervaringen: de scheve projectie (axonometrische projectie) die in de Chinese en Japanse schilderkunst gebruikt wordt. (Figuur 3).



*Figuur 3: Twee gelieven en de koekoek - Buncho (ca 1770), Japanse perspectief.*

Ik geloof dat de vraag naar de natuurgetrouwe afbeelding een schijnvraag is omdat het begrip natuurgetrouw in deze context geen betekenis heeft, niet omschreven kan worden. Uit het bovenstaande volgt dan ook niet dat de Japanse afbeeldingswijze natuurgetrouw is, maar dat ze een goede visuele uitdrukking is van onze tactiele ervaringen.

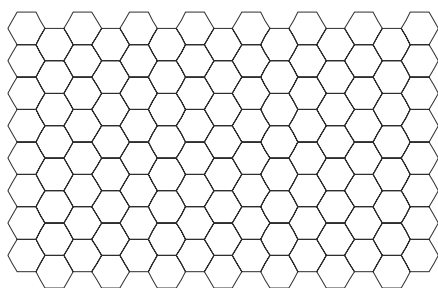
J.A.F. de Rijk

## EEN ONOPGELOST PROBLEEM IN HET DOMEIN VAN DE VLAKVERDELINGEN (2)

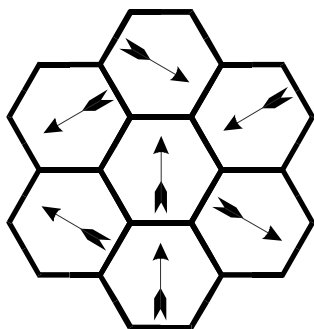
*Van dit artikel - gebaseerd op de lezing op de Ars et Mathesisdag op 11-11-1995 en verder uitgebreid met enkele wetenswaardigheden - stond de inleiding in de vorige Arthesis; hieronder deel 2, deel 3 volgt later.*

### 2. Werkwijze

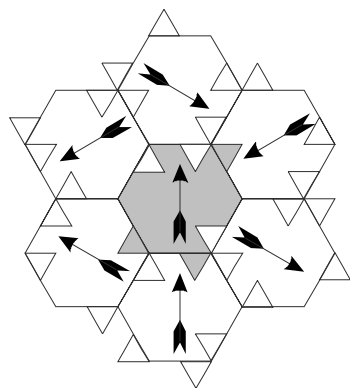
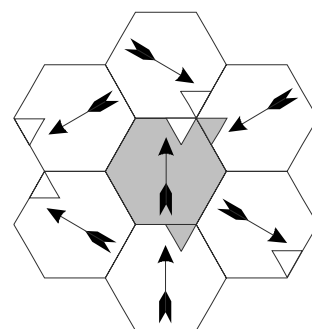
Het eerste wat we moesten doen was het ontwerpen van een tegel die liefst geen periodieke vlakverdeling zou veroorzaken. We wisten dat een regelmatige periodieke vlakverdeling als we nu deze zeshoeken verte nemen dan ontstaat mogelijk elke zeshoek een pijl die deze ten we de zeshoeken om de oriëntatie door op één zijde van de zeshoek waardoor de zeshoek een oriën-



we met regelmatige zeshoeken verdeling kunnen maken. plichten bepaalde oriëntaties aan iets leuks. Dus tekenden we op richting aangaf, hierna verplicht-entatie te volgen van deze pijlen bijv. een driehoekje te plaatsen tatie krijgt.

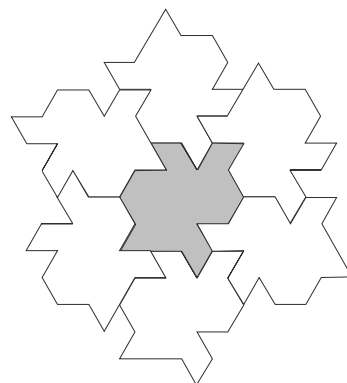


Bij onze eerste poging werden de pijlen willekeurig geplaatst, en later zal dan blijken of we met onze keuze van pijlen er goed aan gedaan hebben, m.a.w.: resulteren de pijlen in een tegel waarmee een interessante vlakverdeling gemaakt kan worden.



Als we dit driehoekje tekenen bij alle zeshoeken, krijgt de centrale zeshoek automatisch twee driehoekjes bij.

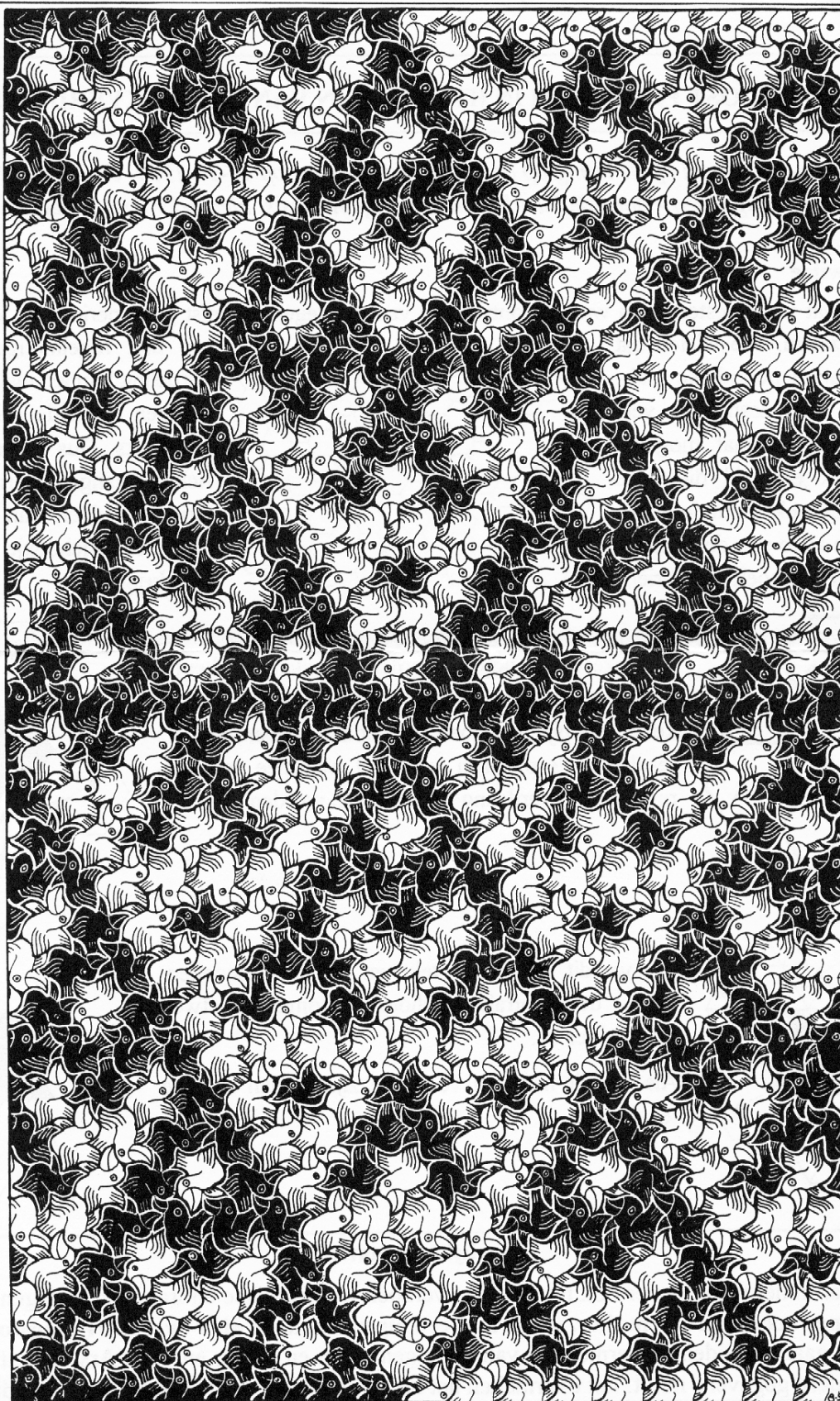
Als we dit herhalen voor alle zijden, dan is onze tegel klaar.



### Jaarlijkse donatie!

Zoals elk jaar in het meinummer ook nu weer het verzoek Uw jaarlijkse bijdrage dezer dagen te storten, **b.v.k. niet per acceptgiroformulier, maar met een eigen bank- of giro-overschrijvingsformulier.** In elk geval gaarne duidelijke vermelding van uw eigen naam en adres, en van "Ars et Mathesis". Zie voor de verdere gegevens m.b.t. het overmaken het kader bovenaan op de laatste pag. van dit nummer.

Wat we nu natuurlijk nog niet weten is of deze tegel speciale vlakverdelingen geeft, want als we onze pijlen in het begin niet goed plaatsen kan het goed zijn dat de tegel helemaal geen vlakverdeling geeft. Maar blijkbaar hadden we die dag veel geluk. We hadden onze pijlen goed gekozen, want na veel puzzelen ontstond een vrij mooie vlakverdeling. De zeshoeken hebben we verder vervormd tot eendjes.



### 3. Resultaten

#### a. De prent “Eendjes”

Tijdens het puzzelen bleek al snel dat, als men in het begin op een willekeurige manier begon te puzzelen, dikwijls situaties ontstonden waarbij het onmogelijk was de vlakverdeling te vervolledigen, er ontstonden namelijk plaatsen waar het eendje niet meer paste. Op bepaalde plaatsen passen er soms verschillende oriëntaties van eendjes, en als men dan een verkeerde oriëntatie kiest kan het zijn dat de vlakverdeling na enige tijd blokkeert. Men moet dan een gedeelte van de vlakverdeling terug verwijderen, een betere oriëntatie kiezen en opnieuw proberen.

Daarom zijn we nadien iets meer systematisch te werk gegaan, we nummerden de verschillende oriëntaties van de eendjes van 1 tot 6. We namen eendje 1, probeerden terug eendje 1 erin te passen, lukte dit niet dan probeerden we eendje 2 enz. En zo bleek dat men een oneindige lange rij van eendje 1 kan maken. Dit namen we als basis voor de prent: een oneindig lange rij van steeds dezelfde oriëntatie van eendjes. Deze rij is op de prent in het midden terug te vinden: een reeks zwarte eendjes die allemaal achter elkaar naar links vliegen.

Eenmaal we deze centrale rij hadden, konden we starten met het leggen van de rijen erboven. En al snel bleek dat er nu iets bijzonders aan de hand was. Het bleek dat we niet veel meer keuze hadden in de oriëntatie van de eendjes voor het vormen van de nieuwe rijen. Bijv. de tweede rij: hier bleken slechts twee soorten eendjes te passen en eenmaal we één van deze twee gelegd hadden, was de volledige rij gedwongen. We waren namelijk gedwongen de twee mogelijke eendjes afwisselend naast elkaar te leggen, een andere mogelijkheid was er niet.

De derde rij: net hetzelfde, vier soorten (of oriëntaties van) eendje pasten, eenmaal we één van deze vier eendjes gelegd hadden dan waren we verder gedwongen deze vier afwisselend naast elkaar te leggen, dus de volledige rij is gedwongen. Men moest dus eigenlijk niet kiezen, het resultaat is toch steeds hetzelfde, hooguit is de rij iets verschoven. Voor het eindresultaat maakte dit echter niets uit, het patroon bleef toch hetzelfde. M.a.w. het globale patroon van de vlakverdeling lag reeds vast, het enige wat we blijkbaar nog konden kiezen was de plaats waar we aan het werken waren in het patroon.

Voor sommige rijen bleek zelfs dat we totaal geen keuze hadden. Onze keuze had toch geen invloed op het totale patroon, maar bij sommige rijen waren we zelfs verplicht één bepaalde oriëntatie van eendje op een bepaalde plaats te leggen. Andere oriëntaties pasten op deze plaats gewoon niet. En zoals steeds: éénmaal dit eendje gelegd was de rij gedwongen. Het gedwongen karakter van deze rijen was dus nog sterker.

Eenmaal men de zwarte centrale rij eendjes getekend heeft, is de bovenste helft van de prent volledig gedwongen.

Voor de onderste helft hebben we niet veel moeite moeten doen: daar de rand van de centrale zwarte rij eendjes aan de bovenkant symmetrisch was ten opzichte van de onderkant, moesten we enkel de bovenste helft  $180^\circ$  draaien en er terug tegen zetten. Of met andere woorden, we spiegelen de bovenste helft ten opzichte van het middelpunt van de prent.

We kunnen deze onderste helft terug mooi in het midden plaatsen, zoals op de prent, dit geeft dan een mooi symmetrisch beeld, maar we kunnen evengoed de onderste helft eerst iets naar links of rechts verplaatsen. Maar principieel verandert er niets.

#### b. De inkleuring

Er zijn zes verschillende oriëntaties van eendjes, drie hebben een witte kleur en drie werden zwart gekleurd. Als we de eendjes uit de centrale rij beschouwen als eendjes met een rotatie van  $0^\circ$  en we roteren in klokwijzerszin dan zijn de eendjes met een rotatiehoek van  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  en  $300^\circ$  zwart gekleurd, de andere eendjes met een rotatiehoek van  $60^\circ$ ,  $180^\circ$  en  $270^\circ$  zijn wit.

## Stichting Ars et Mathesis

Inlichtingen en aanmelding als donateur: Beverodelaan 205, 6952 JH Dieren, tel. 0313-413307.  
Financiële bijdragen (minimumdonatie fl 30,- per jaar) kunnen worden overgemaakt op bankrekeningnummer 55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn; het gironummer van de ABN/AMRO-bank te Baarn is: 32750. S.v.p. duidelijke vermelding van uw eigen naam en adres, en van “Ars et Mathesis”.

Deze inkleuring is niet willekeurig gekozen, we hebben dit namelijk zodanig gekozen dat bepaalde eigenschappen duidelijk worden.

Doordat de inkleuring oriëntatie afhankelijk is, is de onderste helft niet op dezelfde manier ingekleurd als de bovenste. En een negatief beeld is het ook niet, alhoewel dit op het eerste zicht toch zo lijkt. Om het verschil te zien moet men maar de bovenste rij en de onderste rij van de prent vergelijken. Voor beide rijen zijn de linker eendjes zwart en de rechter eendjes wit. Ze veranderen dus niet van kleur en zodoende is de onderste helft bijna het negatief van de bovenste helft maar niet helemaal. Willen we toch een perfect negatief beeld hebben dan zouden we de onderste helft van de prent over een afstand van zestien eendjes naar rechts of naar links kunnen verschuiven, terwijl we de bovenste helft op zijn plaats laten staan. Nu hebben we een perfect positief/negatief prent, maar helaas veranderen de eendjes in de onderste rij natuurlijk van oriëntatie. Hiermee hebben we de hierboven besproken spiegeling ten opzichte van het middelpunt verbroken! Dus ofwel kiezen we voor een positief/negatief symmetrie ofwel kiezen we voor een vormsymmetrie. Bij het maken van de prent hebben we voor dit laatste gekozen.

Laten we nu nog dieper ingaan op de inkleuring. Kijken we naar de bovenste helft, er staan verschillende driehoeken op de centrale rij. De driehoeken worden gevormd door opeenvolgingen van steeds dezelfde eendjes. We hebben de inkleuring zodanig gekozen dat de twee opstaande zijden van de driehoek een verschillende kleur hebben. Deze driehoeken hebben dus niet drie zwarte zijden, zoals men eerst wellicht zou denken. De zijden moeten opeenvolgingen zijn van *dezelfde* eendjes. Een driehoek bestaat dus uit een gedeelte van de centrale zwarte rij, een opstaande zwarte zijde en een opstaande witte zijde.

We hebben deze keuze van inkleuring gemaakt om twee redenen: ten eerste is er het uitzicht van de prent, ten tweede omdat er met deze opstaande zijden iets bijzonders aan de hand is. Het is namelijk zo dat er steeds één van de twee opstaande zijden stopt terwijl de andere doorloopt. En dit komt het duidelijkst tot uiting als we deze inkleuring gebruikten.

We zien dus dat als de opstaande zijden van de driehoeken “botsen”, er een gevecht tussen de twee soorten eendjes ontstaat en dat één van de twee eendjes overwint. Dit winnende eendje kan dan zijn tocht verder voortzetten over een afstand die gelijk is aan de reeds afgelegde afstand. Het eendje zal onderweg nog wel enkele malen botsen maar het zal steeds de overwinnaar zijn. Enkel als het eendje de reeds afgelegde weg heeft afgelegd ontstaat er terug een gevecht “op leven en dood”. Als we de centrale rij “rij 0” noemen en de rijen dan verder nummeren, dan zal de overwinnaar steeds bekend zijn op een rij met nummer  $2^n$ .

Als in een driehoek bijv. het zwarte eendje wint, dan zal in de even grote driehoek links en rechts ervan automatisch het witte winnen.

Verder is er toch nog een troostprijs voor het verliezende eendje, het mag na de botsing verder vliegen maar in omgekeerde richting, het eendje draait dus door de botsing over  $180^\circ$ .

Kijken we nog even naar de lengten van opeenvolging met steeds dezelfde eendjes, dan zien we dat de lengte steeds  $2^n - 1$  eendjes is. Andere lengten komen niet voor. We zullen zo dadelijk\* zien dat deze opeenvolgingen van  $2^n - 1$  dezelfde eendjes ons nog parten zullen spelen.

Peter Raedschelders

\* in deel 3, in de volgende Arthesis