

A_rthesis

Mededelingenblad
van de Stichting
Ars et Mathesis

redactieadres:
Nieuwstraat 6
3743 BL Baarn

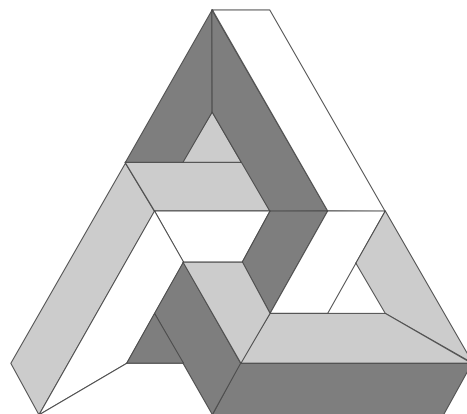
jaargang 9
nummer 3
augustus 1995

EEN ONMOGELIJKE KNOOP?

Hoe vinden we een aanknopingspunt voor deze nieuwe knoop van Koos Verhoeff?

Er zit duidelijk iets in de knoop en dan hebben we vaak behoefte aan een ontknoping. Als een ouderwetse detective moet je dan observeren, deduceren en combineren.

Wat nemen we waar? Waarschijnlijk een negental identieke, vierzijdige stukjes. Drie kleuren worden getoond, is er een vierde kleur? Het lijkt er op of een aantal malen een vierde balkje op een onmogelijke manier onder een eerste balkje doorduikt, toch

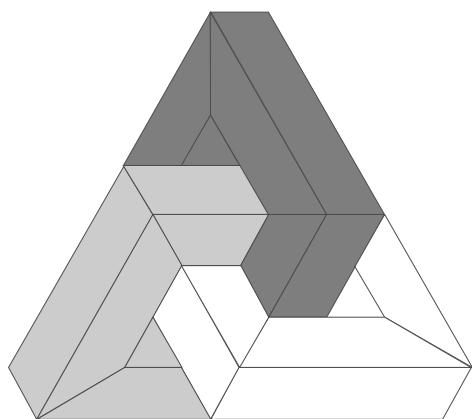


een onmogelijke constructie?

Er zijn 36 vlakjes, waarvan we er maar 18 geheel of gedeeltelijk kunnen waarnemen.

Er gebeuren vreemde dingen in deze knoop, 't lijkt wel of er een möbius-slag in terug te vinden is. Wilt u weten hoe het werkelijk is, komt u dan op zaterdag 11 november a.s. naar Het Brandpunt in Baarn. Koos Verhoeff zal er dan zeker zijn en de ontknoping zal dan plaatsvinden!

H.P. van Tongeren



Uw jaarlijkse bijdrage

Voor degenen die hebben geprobeerd geld over te maken naar onze stichting via een eigen bank- of giro-overschrijvingsformulier, maar waarbij dat niet gelukt is omdat ze niet over het juiste bankrekeningnummer of het juiste gironummer van de bank beschikten, en voor degenen die nog niet aan overmaken waren toegekomen, vermelden we onderstaand beide nummers

Het bankrekeningnummer is: **55 27 11 896 t.n.v. Ars et Mathesis te Baarn**. Het gironummer van de ABN/AMRO-bank te Baarn is: **183986, eveneens onder vermelding van Ars et Mathesis te Baarn**. Wilt u ten behoeve van onze penningmeester ook uw eigen naam en adres duidelijk vermelden?

HET PLASTISCH GETAL UIT DE ARCHITECTUUR VAN DOM JOHANNES VAN DER LAAN.

De architect Dom Hans van der Laan publiceerde enkele studies over verhoudingen, die hij in zijn ontwerpen gebruikte. Een bekend ontwerp van hem is de Benedictijnse Abdij in Vaals. In dit artikel wil ik enkele van zijn gedachten na vertellen. Daarbij zal ik uitgaan van zijn studie

*Dom H. van der Laan: De Architectonische ruimte
(vijftien lessen over de dispositie van het menselijk verblijf);
Leiden 1992.*

Ik zal de gebruikte omschrijvingen vertalen naar een, de lezers van Arthesis ongetwijfeld bekend, algebraïsch formalisme.

Van der Laan zelf wil bewust alleen meetkundige termen gebruiken. Als hij over lijnstukken met steeds grotere lengten wil spreken noemt hij deze het kleine element, het grote element, het kleine stuk, het grote stuk, het kleine deel, het grote deel, het kleine geheel en het grote geheel.

Dit zal ik vertalen als $x_0, x_1, x_2, \dots, x_6, x_7$. Hierdoor hoop ik voor de lezers van Arthesis de boeiende achtergrond van het werk van Van der Laan meer toegankelijk te maken.

Een eerste opmerking in zijn theorie is dat onze waarneming natuurlijk niet lengten in absolute nauwkeurigheid, in verschillen van tienden van millimeters kan waarnemen. Binnen zekere marges zien we lijnstukken als evenlang. Hij poneert dat we lijnstukken met lengtes tussen $a(1 - \varepsilon)$ en $a(1 + \varepsilon)$ alle evenlang als een lijnstuk met lengte a waarnemen..

Wanneer we twee lijnstukken a en b willen introduceren voeren we eigenlijk twee verzamelingen lijnstukken met ongeveer gelijke lengte in. Bij a alle lijnstukken die groter dan $a - a\varepsilon$ en kleiner dan $a + a\varepsilon$ zijn, bij b alle lijnstukken die groter dan $b - b\varepsilon$ en kleiner dan $b + b\varepsilon$ zijn.

En omdat we de lijnstukken in groepjes willen indelen willen we dat deze verzamelingen aansluiten, dus dat $a + a\varepsilon = b - b\varepsilon$. Dan is

$$b/a = (1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon).$$

Willen we een derde groep lijnstukken met lengte ongeveer c invoeren, dan zullen we hiervoor alle lijnstukken met lengte groter dan $c - c\varepsilon$ en kleiner dan $c + c\varepsilon$ gebruiken. Om het weer aan te laten sluiten eisen we $b + b\varepsilon = c - c\varepsilon$. Hieruit volgt dat

$$c/b = (1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon) \text{ en dus } c/b = b/a \text{ en } a,$$

b en c vormen de eerste drie termen van een meetkundige rij.

Noemen we de rede van deze rij t dan is de voortzetting van de rij

$$a, at, at^2, at^3, at^4, \dots; \text{ hierbij is dus } b = at, c = at^2.$$

Kiezen we a, b en c zo dat $c = a + b$ dan geldt

$$at^2 = a + at \text{ en dus } t^2 = t + 1.$$

We vinden zo dus een meetkundige rij met rede

$$t = 1/2 + 1/2 \sqrt{5} = 1.6180\dots$$

De termen a, b en c zijn dus respectievelijk het kleinste, het grootste en het geheel van een in uiterste en middelste reden verdeeld lijnstuk. En ieder drietal opeenvolgende termen is zo'n in uiterste en middelste reden verdeling, de gulden snede.

Van der Laan ziet deze als typisch twee dimensionaal, dus voor vlakverdelingen. Bij de architectuur heeft hij behoefte aan een drie dimensionale verhouding.

*Zie voor een andere opzet voor een drie dimensionale verhouding:
F. van der Blij en W. Vastrick : Van gulden snede naar zevensnede;
Nieuwe Wiskrant 14 / 2, pag 34 - 38, 1995.*

Van der Laan begint nu ook met een meetkundige rij: a, b, c en d en stelt de eis dat $d - b = a$, dus dat de vierde term de som van de eerste en de tweede is; $d = b + a$.

Daar de termen een meetkundige rij vormen kunnen we schrijven:

$$a, ap, ap^2, ap^3, ap^4, ap^5, \dots$$

Omdat $b = ap, c = ap^2, d = ap^3$ geldt in formule dus

$$ap^3 = ap + a, \text{ of ook } p^3 = p + 1.$$

We merken nu op dat de vijfde term, ap^4 , gelijk is aan de som van ap^2 en ap , dus aan de som van de derde en de tweede term, en de zesde term gelijk is aan de som van de vierde en de derde term enzovoort. Omdat $p^3 = p + 1$ is p bepaald als wortel van een derdegraads vergelijking, enig proberen met de rekenmachine leert $p = 1.3247179\dots$

Kent U de methode van Cardanus voor het oplossen van derde graads vergelijkingen dan kunt U de wortel zelfs expliciet bepalen.

We voeren twee nieuwe onbekenden u en v in met som p , dan zal

$$(u + v)^3 = (u + v) + 1;$$

werken we de derde macht uit dan komt er

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = (u + v) + 1.$$

We proberen nu u en v zo te kiezen dat zowel $u^3 + v^3 = 1$ als $3uv = 1$.

Dus geldt $v = 1/3u$, vullen we dit in $u^3 + v^3 = 1$ in dan komt er een gewone vierkantsvergelijking in u^3 .

Deze kunnen we met de bekende formule oplossen en daarna door de derde wortel te trekken u bepalen. Dan is ook v te vinden en het antwoord wordt

$$p = u + v = 1/6 \{ 108 + 12 \sqrt[3]{69} + 108 - 12 \sqrt[3]{69} \}$$

Maar dit is niet in de geest van Van der Laan. Het gaat immers om de verhouding van lijnstukken en die zien we niet in getallen met vele decimalen achter de komma. Hoewel hij in zijn studie wel de derdegraads vergelijking vermeldt, vinden we niet een decimale ontwikkeling van de wortel, het plastische getal p .

Toch heb je een numerieke benadering nodig, liefst of eigenlijk beslist een rationale benadering. We zouden, weer tegen de geest van Van der Laan in, de wortel van de vergelijking in een kettingbreuk kunnen ontwikkelen en zo een rationale benadering voor p vinden.

Met een zakrekenmachine gaat dat heel eenvoudig:

$$p = 1.3247179\dots$$

$$p - 1 = 1/a \quad (\text{toets } p \text{ in daarna } - 1 \text{ en daarna de toets } 1/x \text{ en je hebt } a \text{ in het venster})$$

$$a - A = 1/b \quad (A \text{ is het stuk van } a \text{ voor de komma, dus het grootste gehele getal kleiner dan } a)$$

$$b - B = 1/c \quad (B \text{ is het getal van } b \text{ voor de komma})$$

$$c - C = 1/d \quad (C \text{ is het getal van } c \text{ voor de komma})$$

Herhaal dit proces nog een paar keer en stop dan, bijvoorbeeld bij $g - G = 1/h$

Schrijf nu ter vereenvoudiging $g = G$ en reken terug.

Voorbeeld :

$$p = 1.3247179\dots$$

$$a = 1/0.3247179\dots = 3.079596\dots, \text{ dus } A = 3$$

$$b = 1/0.079596\dots = 12.56341\dots, \text{ dus } B = 12$$

$$c = 1/0.56341\dots = 1.774877\dots, \text{ dus } C = 1$$

$$d = 1/0.774877\dots = 1.290526\dots, \text{ dus } D = 1$$

Breken we hier af en werken we terug dan vinden we

$$d = 1, \text{ dus } c = C + 1/d = 2, b = B + 1/c = 12 \frac{1}{2} = 25/2, a = A + 1/b = 3 + 2/25 = 77/25.$$

$$\text{En dus } p = 1 + 1/a = 1 + 25/77 = 102/77.$$

Inderdaad is $102/77$ een goede benadering, we vinden $102/77 = 1.32467\dots$

Als U dit leuk vindt moet U het ook eens doen met de gulden verhouding!

Maar dit alles past natuurlijk niet in de meetkundige omschrijvingen van Van der Laan. We moeten niet over een rij getallen maar over een rij lijnstukken spreken. De lengten van de opeenvolgende lijnstukken kunnen we a, b, c, d, e, f, g, h noemen. We beginnen met een lijnstuk dat we lengte 1 geven. De lengtes van de opeenvolgende lijnstukken vormen een meetkundige reeks die we maar even onbegrensd voortzetten. We vinden dan de rij

$$1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, \dots$$

De eis dat $p^3 = p + 1$ voert tot allerlei relaties tussen deze nieuwe termen, we zijn natuurlijk alleen geïnteresseerd in relaties tussen lijnstukken in de vorm van sommen en verschillen. Produkten, die oppervlakten zouden voorstellen nemen we niet op in onze beschouwingen.

We zien direct dat

$$p^4 = p^2 + p$$

$$p^5 = p^3 + p^2$$

enzovoorts. We schrijven nu de rij als

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$$

en vinden dat

$$t_{n+3} = t_{n+1} + t_n$$

een mooie analogie met de rij van Fibonacci, waarvoor geldt

$$t_{n+2} = t_{n+1} + t_n.$$

We komen hier nog op terug.

Maar er gelden meer relaties, we kunnen iedere macht van p uitdrukken als som van 1, p en p^2 met gehele getallen als coëfficiënten, bijvoorbeeld

$$p^5 = p^2 + p + 1$$

$$p^6 = p^2 + 2p + 1$$

En zo vinden we de aardige relatie $p^6 = p^5 + p$, die door Van der Laan gebruikt wordt om het viertal a, b, c en d aan te vullen tot a, b, c, d, e, f met $f = e + a$.

Maar ook negatieve machten van p , waarmee we de rij voortzetten naar steeds kleiner lijnstukken zijn uit te drukken als verschillen en sommen van 1, p en p^2 .

Enkele voorbeelden:

$$p^{-1} = 1/p = p^2 - 1$$

$$p^{-2} = 1/p^2 = -p^2 + p + 1$$

enzovoorts.

Als we dit voortzetten gebeurt er een wonder. Dom Van der Laan vindt dit wonder zonder algebra met zijn woordtermen als groot stuk, klein element enzovoorts. Deze rij wordt uitgebreid met steeds kleinere lijnstukken, door het kleine element als groot geheel van een nieuwe rij op te vatten. Zelfs herhaalt hij dit proces nog een keer. Het lijkt als of het "octaaf" $a, b, c, \dots, g, h$ voortgezet wordt naar een rij één en zelfs twee octaven lager.

De verlaagde a staat tot de a zelf als

$$p^{-7} : 1 = 1 : p^7 = 1 : 7.15919..$$

Richard Padovan legt verband tussen de verhoudingen die bij Van der Laan optreden en muzikale verhoudingen.

Richard Padovan: Dom Hans van der Laan, A Modern Primitive, Architectura et Natura; 1994.

Het wonder is nu dat als we ver genoeg rekenen twee negatieve machten van p voorkomen, die een lineaire combinatie van alleen 1 en p respectievelijk van alleen 1 en p^2 zijn. Namelijk

$$1/p^{-13} = 4 - 3p$$

$$1/p^{-14} = 4p^2 - 7$$

Omdat p een getal groter dan 1 is, is $1/p$ kleiner dan 1 en de hoge machten van $1/p$ zijn erg klein.

Verwaarlozen we deze, dan vinden we als benadering voor p de waarde $4/3$ en voor p^2 de waarde $7/4$. Zo komt Dom van der Laan tot het rijtje

1, $4/3$, $7/4$.

We kunnen nu op twee manieren verder gaan, enerzijds kunnen we voor de volgende term de som van de eerste en de tweede, dus $1 + 4/3 = 7/3$ nemen, anderszijds kunnen we de derde term met $p = 4/3$ vermenigvuldigen, $7/4 \cdot 4/3 = 7/3$. Het is duidelijk dat we voor de vierde term $7/3$ kiezen.

We hebben nu dus:

1, $4/3$, $7/4$, $7/3$.

Nu de vijfde term, weer met twee mogelijkheden, namelijk de som van de tweede en de derde term dus $4/3 + 7/4 = 37/12$ of $4/3$ keer de vierde term, dus $4/3 \cdot 7/3 = 28/9$. Beide breuken liggen dicht bij 3, We kiezen als vijfde getal 3.

We hebben nu dus:

1, $4/3$, $7/4$, $7/3$, 3.

Voor de zesde term kunnen we nemen $7/4 + 7/3 = 49/12$ of $4/3 \cdot 3 = 4$. We kiezen 4.

Dan geldt zelfs ook nog de relatie, die Dom Van der Laan gebruikt, dat de zesde term de som is van de vijfde en de eerste:

1, $4/3$, $7/4$, $7/3$, 3, 4.

Voor de zevende term kunnen we kiezen uit $7/3 + 3 = 16/3$ of $4/3 \cdot 4 = 16/3$, dus $16/3$.

1, $4/3$, $7/4$, $7/3$, 3, 4, $16/3$.

Voor de achtste en laatste term vinden we $3+4 = 7$ of $4/3 \cdot 16/3 = 64/9$, we kiezen 7,

1, $4/3$, $7/4$, $7/3$, 3, 4, $16/3$, 7.

In eerste instantie ontbreekt het getal $16/3$ bij Van der Laan. Naast deze rij schrijft hij ook de rij van de omgekeerden op:

$1/7$, $3/16$, $1/4$, $1/3$, $3/7$, $4/7$, $3/4$, 1.

Omdat 7 keer de onderste rij de bovenste rij moet vormen zien we kleine afwijkingen doordat we in plaats van met het irrationale plastische getal met rationale benaderingen werken. Gelukkig schelen $7 \cdot 3/16 = 21/16$ en $4/3$ niet zoveel en $7 \cdot 3/4 = 21/4$ en $16/3$ evenmin.

In een aparte tabel aan het slot laten we nog even ter vergelijking de echte waarden van de getallen uit deze rijen zien en de benaderingen met de breuken.

We gaan even met wat meer details in op één facet uit de publicatie van Padovan. Hij verdeelt de sprong van een lijnstuk naar een zevenmaal groter lijnstuk in veertien sprongen.

$1/1-8/7-4/3-3/2-7/4-2/1-7/3-8/3-3/1-7/2-4/1-14/3-16/3-6/1-7/1$.

De intervalsprongen zijn steeds $8/7$, $7/6$ en $9/8$. Omdat $8/7 \cdot 7/6 \cdot 9/8 \cdot 7/6 \cdot 8/7 = 2$ vinden we na vijf sprongen het octaaf. Ik ben geneigd dit systeem iets te veranderen :

$1/1-8/7-4/3-3/2-7/4-2/1-16/7-8/3-3/1-7/2-4/1-32/7-16/3-6/1-7/1-8/1$

en zo drie octaven te omspannen.

De verhoudingen met factor 7 zijn in de muziek ongebruikelijk, de verhouding $9/8$ is klassiek.

In het Pythagoreïsche systeem wordt alleen met verhoudingen gewerkt die uit factoren 2 en 3 zijn opgebouwd. Moderne systemen voegen daar nog de priemfactor 5 aan toe. Padovan geeft ook nog een vergelijking van het systeem van Van der Laan met het Pythagoreïsche systeem.

Keren we nu terug naar het begin: de lijntjes waren eigenlijk verzamelingen lijntjes, met lengte groter dan $a - a\varepsilon$ en kleiner dan $a + a\varepsilon$. Nu we voor p het plastisch getal $p = 1.3247...$ hebben gekozen kunnen we uit de boven gevonden formule $(1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon) = p$ het getal ε berekenen, we vinden $0.1396...$ en de grenzen voor de verzameling lijntjes met lengte a worden nu $0.8603...a$ en $1.1397...a$.

Waar liggen nu de deelpunten, die deze verzamelingen van elkaar scheiden? Tussen a en b hebben we een scheidingpunt s .

Een eenvoudige berekening leert dat het tussenpunt s het harmonisch gemiddelde van a en b is; dus

$$s = 2ab / (a + b).$$

De opeenvolgende tussenpunten vormen weer een meetkundige rij, ook weer met de rede gelijk aan het plastisch getal p . Tussen de termen 1 en p van de oorspronkelijke rij komt het tussenpunt $2p / (p + 1) = 2 p^{-2}$. De rij van de tussenpunten is de zelfde als het dubbele van een verschoven oorspronkelijke rij.

We weten dat er een verband bestaat tussen de gulden snede en de rij van Fibonacci. Het quotient van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci nadert tot de gulden snede. We zagen bij het opstellen van formules voor de door Van der Laan gebruikte rij van lijnstukken een relatie optreden, die gelijkenis vertoont met de definitie van de rij van Fibonacci. Namelijk:

$$t_{n+3} = t_{n+1} + t_n.$$

Om zo'n rij te starten moeten we de eerste drie termen vastleggen. Kiezen we hiervoor a , b en c dan wordt de rij:

$$a, b, c, a+b, b+c, a+b+c, a+2b+c, a+2b+2c, 2a+3b+2c, \dots$$

We bekijken nu speciaal de rij die met 1, 0, 0 begint:

$$1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, \dots$$

Wiskundig is vrij eenvoudig te bewijzen dat iedere rij die met deze regel geconstrueerd wordt (op een heel bijzondere uitzondering na) de eigenschap heeft dat het quotient van twee opeenvolgende termen tot het platische getal nadert. Zo is $265/200 = 1.325$ al een goede benadering.

We merken nog op dat de rij die met 0, 0, 1 begint eenvoudig uit bovenstaande rij te vinden is door één plaats op te schuiven. De rij die met 0, 1, 0 begint vinden we door twee plaatsen op te schuiven. Een rij die met a , b en c begint is nu eenvoudig op te stellen als combinatie van deze drie basisrijen.

U zult begrijpen dat deze hele theorie bij Dom van der Laan, zonder formules opgeschreven en uitgewerkt, vele bladzijden in beslag neemt, die we hier maar gedeeltelijk konden samenvatten.

Van der Laan stelt ook nog enkele combinatorische problemen aan de orde. Allereerst wil hij plankjes, waarvan de lengte- en de breedte-maten uit zijn stelsel zijn afgeleid, in een rechthoekige doos passen en hij ontwerpt een kist waar blokken, met lengte, breedte en hoogte uit het systeem in passen.

Voor de praktijk vertaalt hij zijn maatsysteem nog naar standaard maten, als eenheid neemt hij nu een lijnstuk met lengte 100. De acht basis lijnstukken krijgen dan opklimmende lengten tot 716.

Daarnaast voert hij twee verkleiningen in. Zo ontstaat het schema:

De zeven basislengten	100	132.5	175.5	232.5	308	408	540.5	716
De éénmaal verkleinden	14	18.5	24.5	32.5	43	57	75.5	100
De tweemaal verkleinden	2	2.5	3.5	4.5	6	8	10.5	14

Tabel:

precieze waarde	rationale benadering
$p = 1.3247\dots$	$4/3 = 1.3333\dots$
$p^2 = 1.7548\dots$	$7/4 = 1.7500$
$p^3 = 2.3247\dots$	$7/3 = 2.3333\dots$
$p^4 = 3.0793\dots$	3
$p^5 = 4.0793\dots$	4
$p^6 = 5.4038\dots$	$(21/4 = 5.2500, 16/3 = 5.3333\dots)$
$p^7 = 7.1585\dots$	7

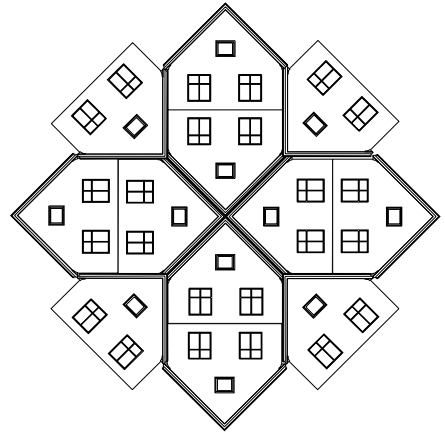
Op de Ars et Mathesisdag 1994 vertelde ik iets over “onmogelijke daken”, onbedoeld maar fascinerend resultaat van door elkaar gehusselde lagen van een bouwtekening op mijn computerscherm. Een poging om dit te reconstrueren, om alsnog in deze Arthesis mijn verhaaltje te visualiseren, strandde. Maar al rommelend door mijn bouwtekeningen deed ik wel een andere ontdekking: het ritme in de maatvoering van de dorpstimmerman!

Kijk maar eens naar dit geveltje:

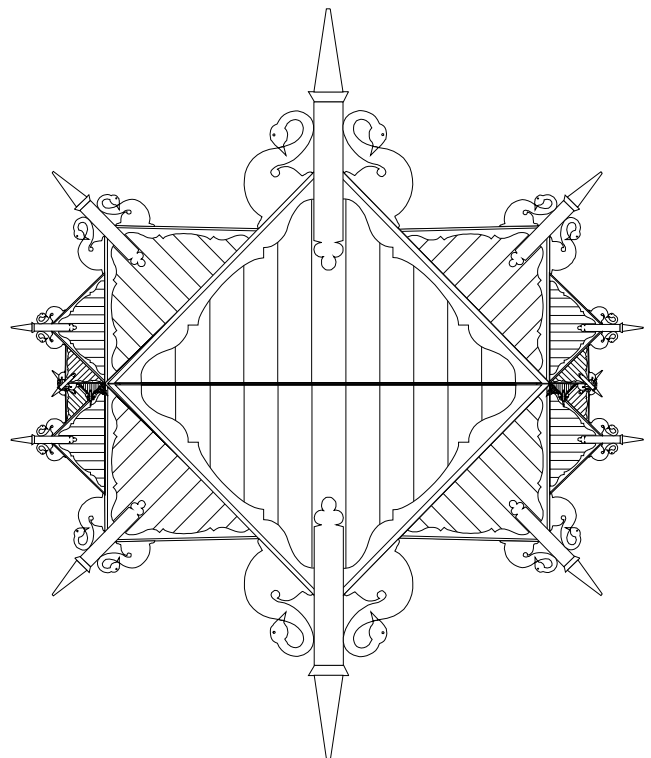
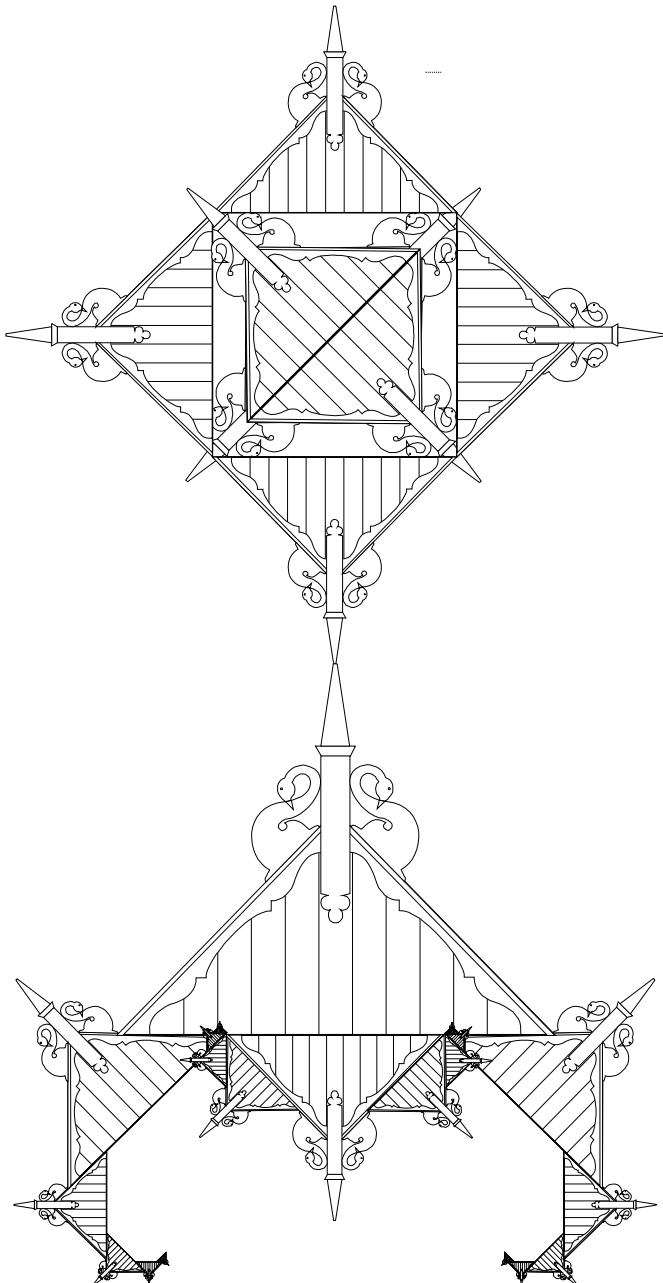


het vooraanzicht van een “bijschuur” zoals een anonieme dorpstimmerman zich die zo’n 50 jaar geleden dacht. Simpel, maar er is iets mee aan de hand. Dat blijkt wanneer we wat met dat geveltje gaan spelen:

Onze onbekende timmerman heeft zich vast en zeker niet zo berekend met maatvoering beziggehouden als Dom van der Laan, maar heeft niettemin - intuïtief of niet, dat blijft gissen - zijn verhoudingen niet zó maar gekozen. Zo toont eenvoud eigen esthetische finesse...



Ook met het “uilenbord” van het hoofddak (net als het geveltje getekend in de verhoudingen van de gebouwde werkelijkheid) valt op avontuur te gaan, zoals hiernaast en hieronder is weergegeven.



Zo krijg je ander zicht op eigen huis. Bekijk uw woning eens met nieuwe ogen - wie weet wat u ontdekt.

Ineke Lambers

ARS ET MATHESISDAG 1995

Zoals in de vorige Arthesis eveneens aangekondigd, is het “Brandpunt” in Baarn al gereserveerd; u kunt in uw agenda noteren (als u dat al niet heeft gedaan):

ZATERDAG 11 NOVEMBER 1995

Donateurs die op deze dag iets willen presenteren wordt verzocht zich tijdig aan te melden bij het bestuur, zodat daar in het programma rekening mee kan worden gehouden.

Tot besluit hieronder een nieuwe **tekening van Peter Raedschelders**: een tetraëder met draden of balken waarop een slang zich beweegt; deze structuur heeft dezelfde eigenschappen als een band van Möbius.

