Arthesis

Mededelingenblad
van **de** Stichting
Ars et Mathesis

redaktieadres:
Nieuwstraat 6
3743 BLBaarn

Jaargang 6
Nummer 2
Juni 1992

Heeft U het al in de agenda genoteerd?
De tentoonstelling over de schoonheid in structuren van Popke Bakker en Koos Verhoeff in het Kasteel Groeneveld te Baarn.
Van 25 Oktober tot 21 December 1992. Zegt het voort!

Oproep: Bij dit nummer van Arthesis treft U een girostortingsformulier aan. Omdat het niet. mogelijk is onze activiteiten te ontplooien zonder Uw bijdrage verzoeken wij U dit biljet nu in te vullen en naar Uw girokantoor of bankadres te versturen.
Laten ook diegenen die dit al enige tijd achterwege hebben gelaten, dit nu doen, daarbij kunt U een inhaalactie uitvoeren.
We nemen ons voor deze actie van nu af aan jaarlijks te herhalen. Ook hoeft. U zich niet te laten weerhouden om grotere bedragen over te maken dan de normale bijdrage.

ARS ET MATHESISDAG 1992 ++++++ °°°°°°°°° +++++++

In 1992 organiseert Ars et Mathesis weer een grote tentoonstelling met als onderwerp: DUBBELVERSTEK
Deze tentoostelling wordt gehouden op Kasteel Groeneveld in Baarn van 24 oktober 1992 tot december 1992.

De Ars et Mathesisdag valt samen met de openingsdag van de tentoonstelling.

nadere mededelingen
hieromtrent
in het volgende nummer
van ARTHESIS.

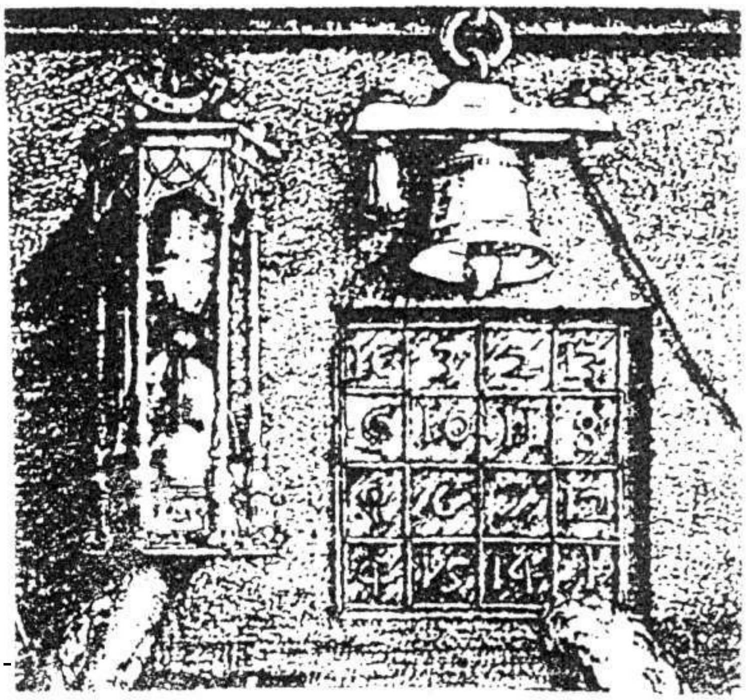
Het TOVERVISJESVIERKANT van
Peter Raedschelders.

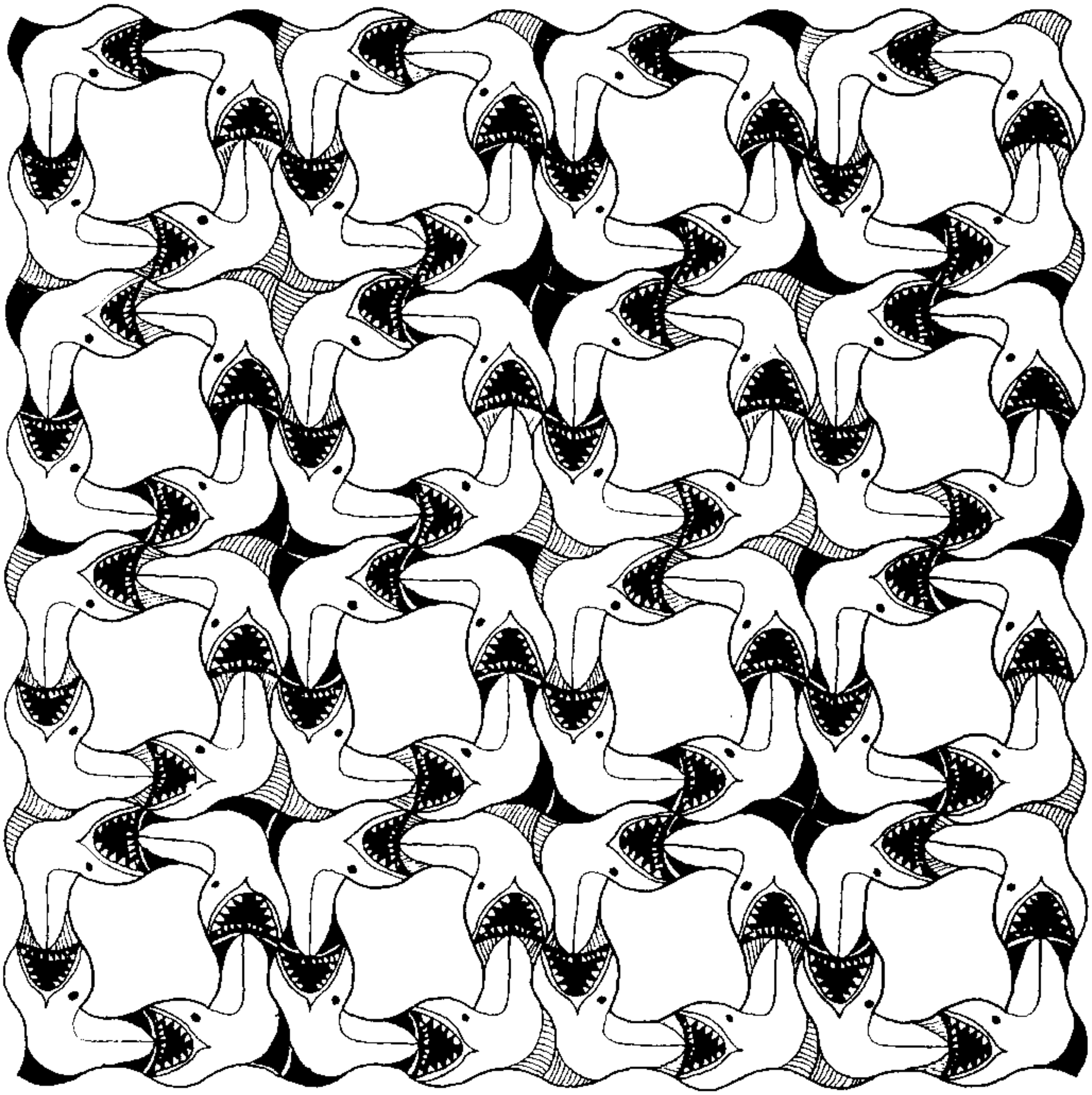
Waarschijnlijk zijn de tovervierkanten afkomstig uit Voor-indie, de bakermat van het schaakspel, en zijn ze door bemiddeling' van de Arabieren naar Europa gekomen, zo ongeveer langs een weg die ook door het schaakspel is gevolgd. Een van de oudste tovervierkanten, die men in West- of Midden-Europa aantreft is het tovervierkant van Dürer. Het komt voor op de kopergravure Melancolia, die in 1514 (welk jaartal op de onderste regel van het tovervierkant voorkomt) door de beroem de schilder Albrecht Dürer (1471-1528) is vervaardigd.

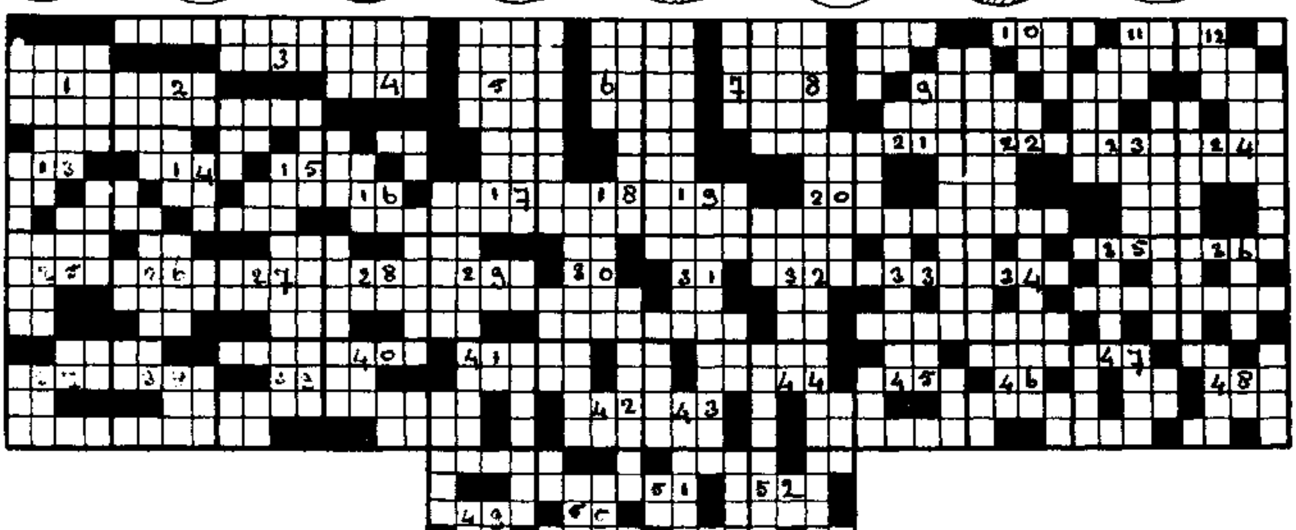
Dit tovervierkant van Dürer, zoals we het zullen noemen, kan dienen om het begrip "tovervierkant" wat nader toe te lichten. Allereerst, bepalen we de som van de getallen 1 tot en met 16. Dit is 1/2 xl6x(1+16)=136. De som van de getallen uit een zelfde rij of uit een zelfde kolom kan bij een tovervierkant van 4 bij 4 niet anders zijn dan een vierde deel van de totale som 136, dus 34.
Op het getekende vierkant komt dit inderdaad uit, terwijl ook ieder van de diagonalen de som 34 oplevert.
16+10+7+1=34 en 4+6+11+13=34. Het tovervierkant van Dürer is regelmatig. Dit betekent dat getallen op twee velden die door draaiing van 180 graden in elkaar overgaan steeds dezelfde som hebben. Die som is noodzakelijk 1 groter dan het aantal velden (dus in dit geval 17), daar het veld met het grootste getal en dat met het kleinste getal (dat is 1) door de draaiing van 180 graden in elkaar moeten overgaan. Door deze draaiing komt het veld linksboven op de plaats van het veld rechtsonder en omgekeerd, terwijl ook de velden rechtsboven en linksonder van plaats verwisselen. Het regelmatig zijn van het vierkant van 4x4 brengt mee, dat ieder van de diagonalen de som 34 oplevert; immers op iedere diagonaal komen twee paren getallen voor, ieder met een som 17.

Het originele vierkant
van Albrecht Dürer.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1





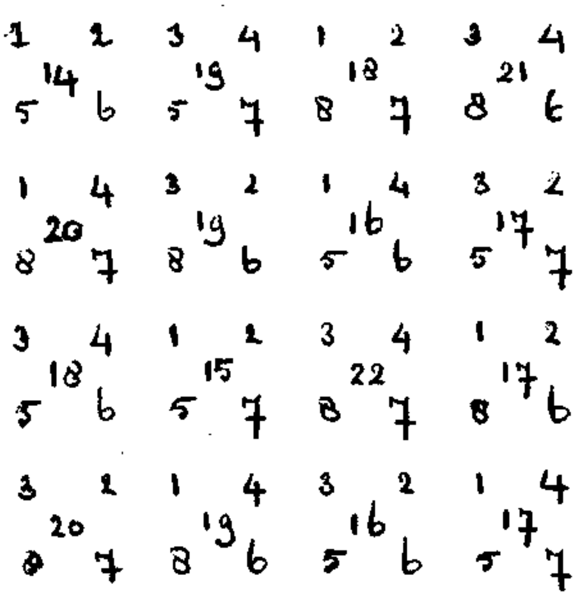


Nu gaan we eens kijken naar het tovervierkant met de visjes. In plaats van getallen treffen we nu visjes in het vierkant aan, met tussen hen in een zestiental ledige bijna vierkantjes.
Er zijn zestien groepen van vier visjes, elk viertal is rond een bijna vierkantje gegroepeerd. De visjes proberen elkaar in de staart te bijten. Er zijn witte en zwarte visjes, te herkennen aan de kleur van de vin en de staart. Elk visje heeft ook een eigen richting (naar rechts, naar beneden, naar links of naar boven).
Analoog aan een klassiek tovervierkant is de "som" horizontaal, vertikaal en diagonaal steeds de zelfde. In dit geval vinden we als "som" voor elke richting steeds twee witte en twee zwarte visjes. In totaal zijn er voor zover bekend 52 verschillende mogelijkheden om steeds diezelfde som te vinden.
Deze 52 mogelijkheden staan schematisch weergegeven in de van 1 tot 52 genummerde vierkantjes van 4 bij 4 onder de vissentekening.
Het tovervierkant met de vissen is evenals het tovervierkant van Dürer een 4 bij 4 vierkant, en bevat dus 16 getallen.
Bij Dürer staat in de cel linksboven het getal 16.
In het vissenvierkant bevat elke cel vier visjes. Deze vier visjes van een cel hebben een verschillende oriëntatie: de bek van de visjes wijst naar rechts, onder, links of boven.
Kijken we nu naar het. eerste van de 52 vierkantjes van 4 bij 4hokjes onderaan het vissenvierkant. Dit is een voorstelling van het vissenvierkant waarbij de vier cellen op de bovenste rij zijn ingekleurd = zwart gemaakt. We beschouwen dus enkel de 4 cellen op de bovenste rij van het vissenvierkant. Deze 4 cellen bevatten samen 8 witte vissen en 8 zwarte vissen (wit en zwart slaat op de kleur van vinnen en staart). Van de 8 witte vissen zijn er steeds twee vissen met dezelfde orientatie, bv er zijn juist 2 witte vissen met de bek naar rechts.
Dit geldt ook voor de andere oriëntaties en voor de zwarte vissen. Deze eigenschap, nl. steeds twee visjes van een bepaalde kleur en een bepaalde oriëntatie, noemen we de "som" van deze vier cellen.
Beschouwen we nu het tweede vierkantje van de 52 vierkantjes.
Nu zijn de vier cellen van de 2e rij ingekleurd. Dit betekent dat de "som" van de vier cellen van de 2e rij van het vissenvierkant weer hetzelfde is: er zijn weer steeds twee visjes met een bepaalde kleur en oriëntatie.
De vierkantjes 1 tot en met 10 geven de voorstelling weer van een klassiek tovervierkant nl. de som van de rijen, de kolommen en de diagonalen is steeds hetzelfde (zoals bij Dürer).
Bij het vissenvierkant zijn er nu nog 42 andere combinaties van vier cellen die steeds dezelfde "som" hebben.
Bij het tovervierkant van Dürer zijn het de voorstellingen van de vierkantjes 1 tot en met 12,17,19,21,23,25,28,31,33,34, 35 en 36 die allen de som 34 opleveren. Bij Dürer zijn niet alle 52 combinaties mogelijk, omdat hij de getallen 15 en 14 naast elkaar plaatste, omdat hij de ets Melancolia I maakte in het jaar 1514 en dit jaartal heeft hij in de prent willen verwerken. Door deze eis wordt het aantal combinaties beperkt, als men tenminste de getallen 1 tot en met 18 wil gebruiken).

Het is gemakkelijk om het vissenvierkant om te vormen tot een tovervierkant met getallen. Er is voor elke cel een getal te berekenen. Geef aan een vis met een bepaalde kleur en een bepaalde oriëntatie een bepaalde waarde. Er zijn in totaal 8 verschillende vissen nl. 2 kleuren x 4 oriëntaties , met andere woorden 8 verschillende waarden. De waarde van een cel nu is de som van waarde van de visjes van een cel. Dit resulteert in een tovervierkant met 16 getallen. Op deze manier kunnen we een oneindig aantal verschillende tovervierkanten maken , want de waarde van een visje is willekeurig.
Een andere heel aardige manier is om alle zwarte visjes de waarde 1 te geven en de witte de waarde 0, de waarde van een cel is dan het binaire getal gelezen in klokwijzerszin.
De cel linksboven kan dan gelezen worden als 1100 (binair) of 12. Het resultaat is dan een tovervierkant met alle getallen van 0 tot en met 15. Tellen we bij alle cellen 1 op dan ontstaat een tovervierkant met de getallen van 1 tot en met 16. (zoals bij Dürer), maar de getallen staan wel op andere plaatsen.

Als :
- zwart rechts = 1
- zwart neer = 2
- zwart links = 7
- zwart op = 8 en
- wit rechts = 3
- wit neer = 4
- wit op = 5
- wit links = 6

ontstaat het volgende resultaat:.



14	19	18	21
20	19	16	17
18	15	22	17
20	19	16	17

→ 72.

72 = 19 + 17 + 17 + 19

HOKJE 52

Onderstaand ziet U het resultaat van de binaire exercitie.

HET BINAIRE RESULTAAT

12	2	15	1
11	5	8	6
0	14	3	13
7	9	4	10

+ 1 →

13	3	16	2
12	6	9	7
1	15	4	14
8	10	5	11

En tenslotte het tovervierkant van 1992.
In dit vierkant komt het jaartal midden onder voor op dezelfde manier als Dürer dit (1514) in zijn tovervierkant heeft verwerkt, maar nu is in dit geval ook de som van de rijen, kolommen en diagonalen 1992.
Dit resultaat wordt verkregen met:

zwart rechts = 1 wit rechts = 34
zwart neer = 2 wit neer = 3
zwart links = 891 wit links = 6
zwart op = 9 en wit op = 50

Veel plezier met dit mooie en interessante TOVERVISJESVIERKANT.

1	2	34	3	1	2	34	3
50	6	50	891	9	891	9	6
1	3	34	2	1	3	34	2
9	891	9	6	50	6	50	891
34	3	1	2	34	3	1	2
50	6	50	891	9	891	9	6
34	2	1	3	34	2	1	3
9	891	9	6	50	6	50	891

59	978	903	52
904	51	60	977
93	944	937	18
936	19	92	945

$\sum = 1992$

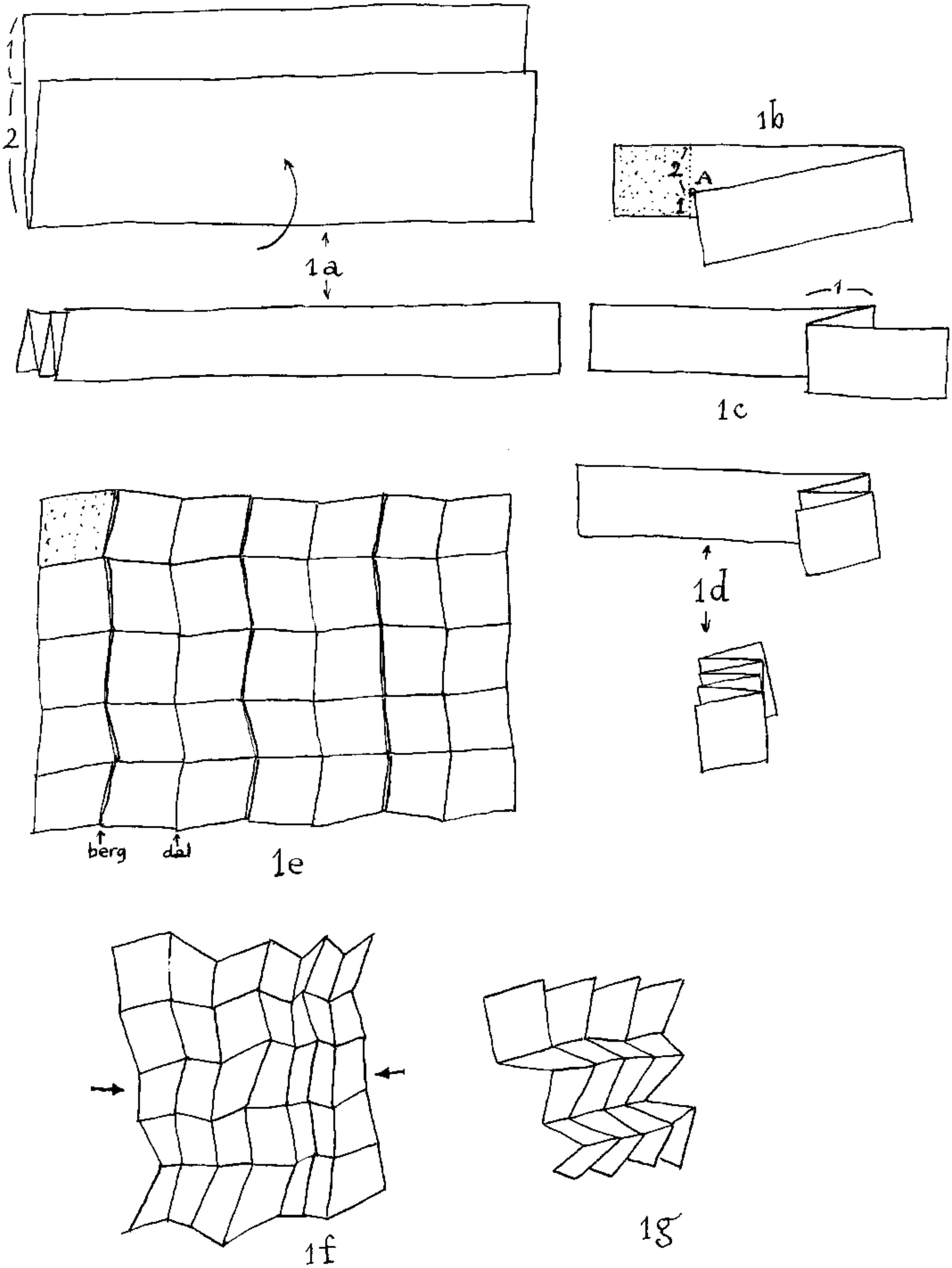
V O U W E N   M E T   S P A N N I N G

J.A.F. de Rijk.

Door de vriendelijke bemiddeling van Marieke de Hoop, origami-specialiste uit Veghel, kreeg ik het congresboek van de eerste internationale origami-meeting (dec. 1989, Ferrara, Italië) in handen.
Daarin werd een merkwaardige vouwwijze beschreven door Koryo Miura, de directeur van een afdeling van een Japans ruimtevaartinstituut. Het gaat hier om het dusdanig opvouwen van een vel papier, dat het zichzelf (met behulp van een geringe druk) steeds weer op dezelfde wijze dichtvouwt.

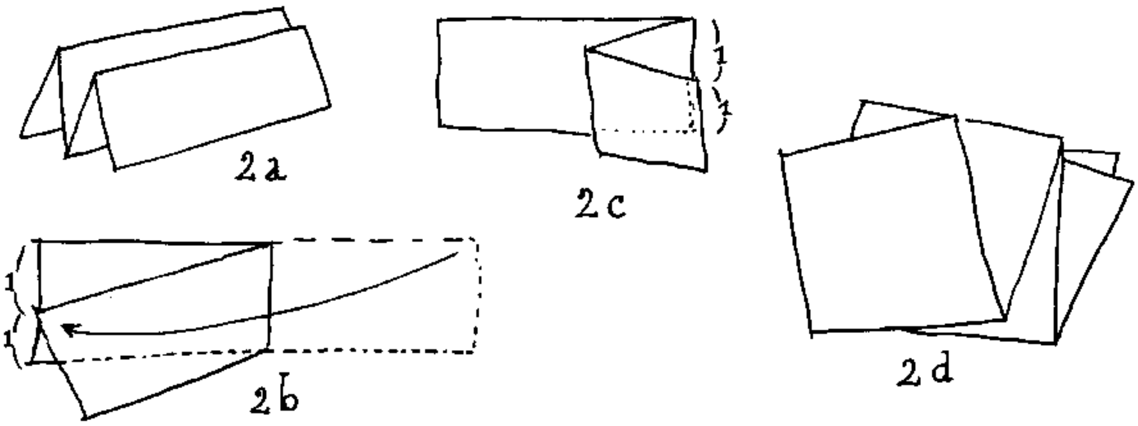
U kent waarschijnlijk wel de vervelende eigenschap van gevouwen stadsplattegronden, dat je dikwijls "verkeerd" opvouwt en pas na enig zoeken de toestand terugvindt die de vouwmachine heeft afgeleverd. Dit komt bij de Miura-vouw niet voor.
Hier geef ik eerst de werkwijze voor het oorspronkelijke miura-vouwen weer en daarna enige vereenvoudigde varianten, die ik zelf bedacht.

Neem een velletje A4 - ik raad U aan om het werkelijk even mee te doen, omdat het resultaat, zelfs bij ietwat onnauwkeurig vouwen, verrassend is - en vouw dat zig-zag, zoals aangegeven in figuur la.
Nu tekent U aan de linkerkant van de strip een vierkantje af en vouwt de rechterkant van de strip naar punt A, dat op 2/3 van de bovenrand ligt U hoeft niet persé precies af te meten; als U het "op het oog" doet, maakt dat niet veel verschil (figuur lb).
Vouw hetzelfde deel van de strip nu terug, zodat er rechts een vierkantje van het onderste deel van de strip bedekt wordt. Deze vouw moet parallel lopen met de bovenrand van het onderste deel van de strip (figuur lc).
Vouw de strip nog eenmaal naar links (evenwijdig aan de tweede vouw) (fig ld).
Draai het pakketje om en vouw de rest van de strip op dezelfde wijze. Na de vouwen nog wat extra geplet te hebben vouwt U het geheel open en U ziet een patroon van ruiten die door vouwlijnen afgetekend worden (figuur 1e).
Nu komt een (voor mij althans) lastig karweitje. Leg het opengevouwen blad met de lange zijde horizontaal voor U. De vertikaal lopende zig-zaglijnen zijn voor de helft de verkeerde kant opgevouwen. U moet al deze stukjes terugvouwen, zodat de meest linkse zig-zaglijn een bergkam wordt, de tweede een dal, etc.
Als dat klaar is, knijpt U het vel zijdelings samen en dan zult U merken, dat het ook in vertikale richting wat samenkrimpt. Dit is het bijzondere van deze vouwwijze: de druk, die op de zijkant wordt uitgeoefend, plant zich over het hele vel voort en trekt het papier ook in vertikale richting samen.
Nu kunt U het geheel tot een pakketje samenknijpen en dan ziet U nog wat bijzonders: alle vouwen zijn mooi van elkaar gescheiden. U krijgt nergens een opeenstapeling van papier, zoals bijvoorbeeld bij de rug van een katern van een boek.
Als U de buitenste "vierkantjes" beetpakt en van elkaar trekt, opent het blad zich en als U het daarna weer bij de hoeken samendrukt, vouwt het geheel zichzelf weer op.
Een dergelijke vouwwijze heeft z'n voordelen voor het samenvouwen van kaarten. Binnenkort zal ze ook worden gebruikt voor opvouwbare zonnepanelen van ruimtevaartuigen. En wellicht zijn er nog andere toepassingen mogelijk tussen deze twee uitersten.

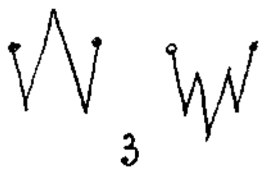

1
2
1a
1b
2
A
1
1
1c
1d
berg
dal
1e
1f
1g

vereenvoudigde varianten

We begonnen met het vouwen van een oneven aantal banen en dat is "op het zicht" niet zo eenvoudig. Ik heb daarom het A4-blad in vieren gevouwen (figuur 2a). Verder is het mikken op een derde deel van een onzichtbare zijde van een vierkant ook niet eenvoudig. Om dit te vermijden heb ik de strip omgevouwen naar het midden van de korte linkerkant.(figuur 2b). Daarna naar het midden van de rechterkant (figuur 2c).
Tenslotte wordt de overgebleven lange strip op dezelfde wijze naar achteren gevouwen.

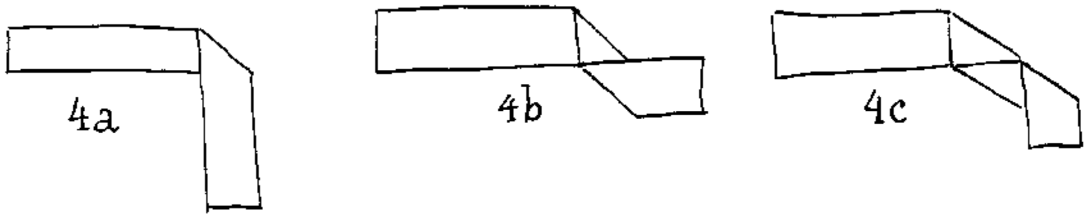


Nu komt weer het vervelende terugvouwen (zoals hiervoor beschreven bij de originele miura-vouw). Uiteindelijk ontstaat een gevouwen stuk papier met een aangename symmetrische vorm, die verder alle mechanische eigenschappen van het oorspronkelijke voorbeeld heeft.
U zult opmerken, dat het opengevouwen blad geen patroon van ruiten maar van trapezia vertoont.
Nu ligt het spel open voor talloze varianten. In plaats van de tweede keer terugvouwen naar het midden (2c) kan men de bovenkant van de vouw evenwijdig maken aan de bovenkant (zoals bij de miura-vouw). Ook kan men de eerste keer (2b) niet naar het midden, maar naar 1/3, 1/4, 1/5, etc vouwen en daarna heeft men weer de keuze tussen evenwijdige vouwen of mikken op dezelfde verhouding.
Men kan zelfs voor de eerste vouw en voor de tweede heel verschillende verhoudingen aanhouden.
Het is ook mogelijk om te beginnen met ongelijke vouwen in de lengterichting. Zie figuur 3.
In alle gevallen blijven de miura-vouw-eigenschappen behouden en men heeft dus ruime keus om te voldoen aan practische of estetische eisen.


3

decoratief

Een apart geval wil ik U niet onthouden. Begin met lengtevouwen zoals in fig 2a. Vouw dan de strip zó dat beide delen loodrecht op elkaar staan en herhaal deze vouw tot "de strip op is"(figuur 4). Behandel het overgebleven deel van de strip op dezelfde manier. Vouw het blad open en corrigeer de vouwen die "verkeerd" zijn.
Wat U nu krijgt bij het openvouwen vormt een prachtig reliëfpatroon.
En ook met dit uitgangspunt kunt U weer verder experimenteren: maak de hoek groter dan 90°; maak de hoek afwisselend groter en kleiner dan 90° etc.



CIRKELSPEL IN GOTHISCHE SPITSBOGEN

Bruno Ernst

Een van de opvallendste elementen van de gothische bouwstijl is de spitsboog. Deze ontstaat door twee cirkelbogen tegen elkaar aan te laten lopen (figuur 1).
Dikwijls is het vlak binnen de spitsboog rijk versierd met een maaswerk, dat eveneens uit cirkels en cirkelbogen is opgebouwd.
Wie eenmaal geboeid is geraakt door deze versieringen verwondert zich steeds weer over de eindeloze variaties, die de middeleeuwse steenhouwers bedachten. Het lijkt alsof men wilde concurreren tegen reeds bestaande vormen, gerealiseerd in vroegere kerken.

fig. 1

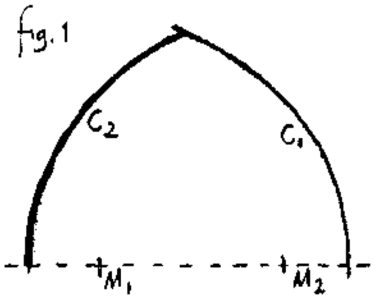


Fig 2

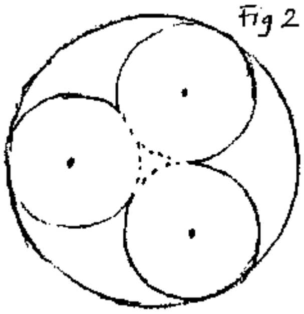
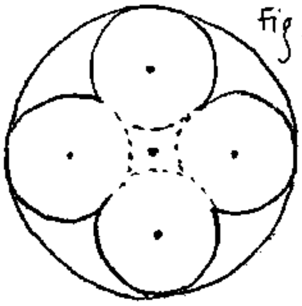


Fig 3



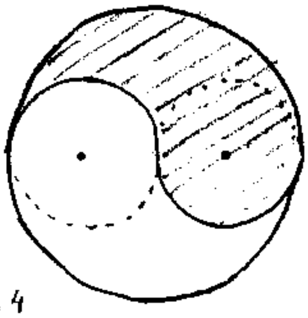


fig 4

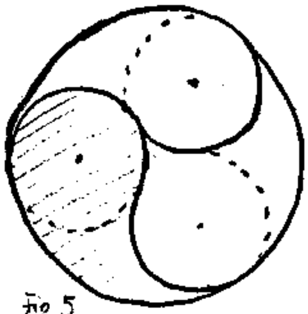


fig 5

fig. 6

We weten, dat bouwtekeningen voor middeleeuwse kathedralen veelal werden ingekrast in gipsplaten: men kon dan naar believen veranderingen aanbrengen door reeds bestaande lijnen weg te schrapen. Ook de tekeningen voor de maaswerken werden op deze wijze in gips gekrast en het is aan het resultaat duidelijk, dat men daarbij "zeer meetkundig" te werk ging. Bij alle fantasie die men gebruikte voor het vinden van nieuwe vormen zorgde een strak meetkundig rooster voor eenheid en gebondenheid, terwijl ook de beperking tot het gebruik van cirkels een te grote willekeur uitsloot.
De meest simpele samenstellingen die men al in het begin van de gothiek vindt zijn de zgn. driepas, vierpas eet. Dit zijn cirkels, waarbinnen drie, vier of meer cirkels elkaar en de buitencirkel raken. (figuur 2 en 3). Ook het visblaasmotief is vrij elementair en gebruikt dezelfde grondvormen als de passen; alleen zijn de cirkels op andere wijze met elkaar verbonden. De eenvoudigste gaat uit van twee cirkels, die elkaar raken. Men krijgt dan een vorm die identiek is aan het Chinese yin-yang-symbool. Bij gebruik van meer cirkels krijgt men de indruk van een wentelend rad.(figuur 4 en 5). Later verrijkt men deze vormen nog door toevoeging van kleinere cirkels in het ronde deel van de blaasvorm (figuur 6).

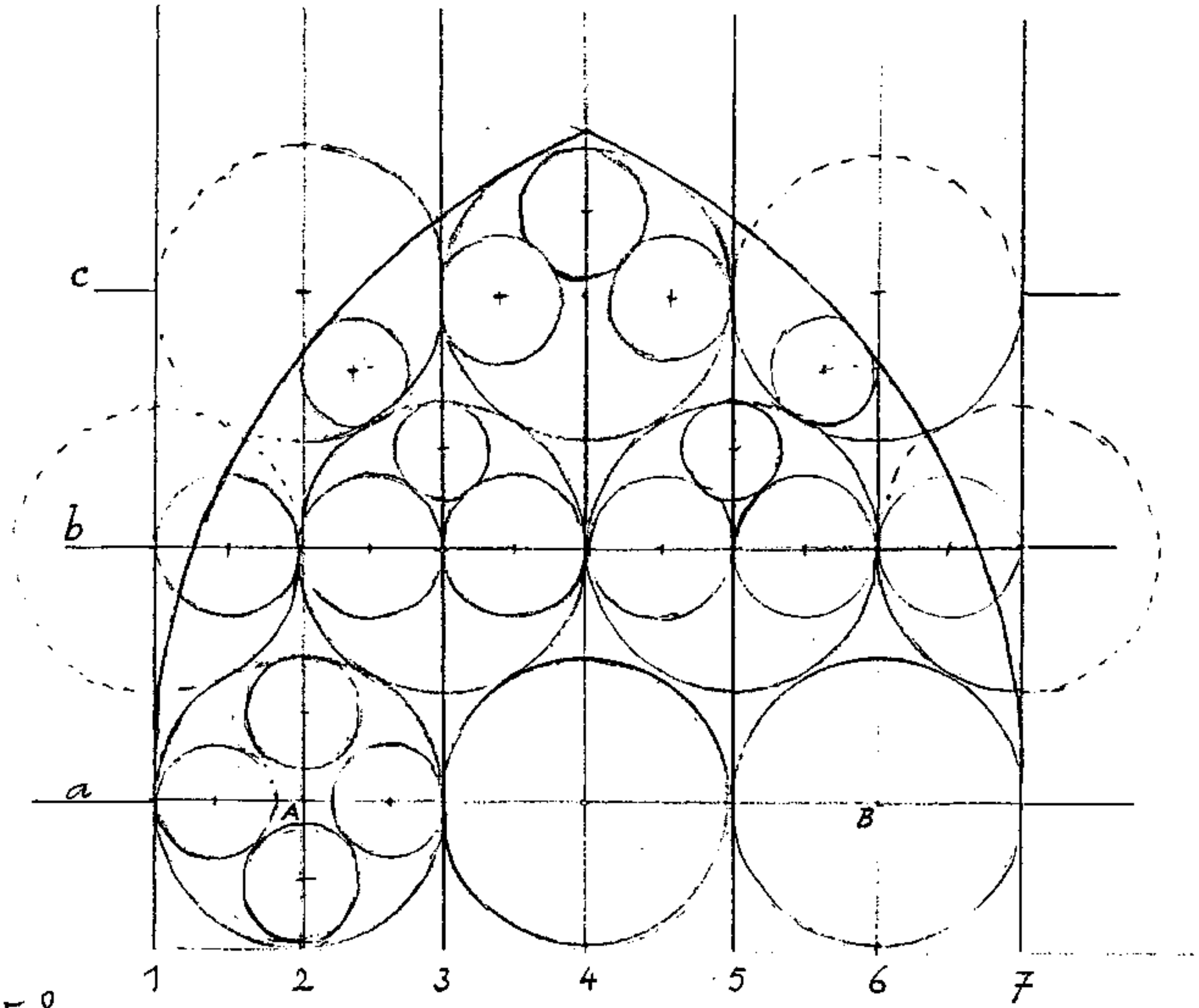


Fig 8

Op de lijn b vinden we vier kleine cirkels die elkaar raken en waarvan de stralen gelijk zijn aan de helft van de stralen van de grote cirkels. Links en rechts van deze rij tekenen we nog zo'n cirkel, waarvan alleen een klein boogje in het maaswerk wordt gebruikt.
De plaats van de twee kleine cirkeltjes, bovenin de twee grote cirkels in het midden, is nu ook vastgelegd: ze moeten aan de kleine cirkels en de grote raken.
De rest is eenvoudig. In de onderste rij cirkels, komen vier elkaar rakende cirkels, zodat vierpassen ontstaan (waarvan maar de helft voor het maaswerk wordt gebruikt). En in de topcirkel komen rakende cirkeltjes van dezelfde grootte.
Tenslotte blijven er nog twee kleine cirkeltjes over die (onder lijn c) raken aan de buitenbogen en de middencirkels.

Met zo'n schema kan men nog alle kanten op om een maaswerk te maken, naar gelang men delen van cirkels weglaat of rakende cirkeldelen vloeiend in elkaar laat overlopen.

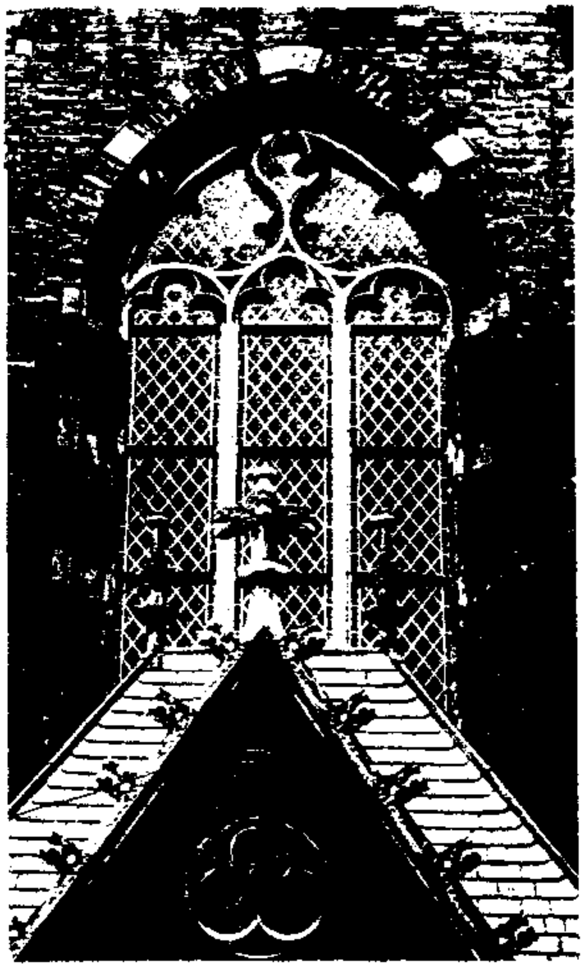
Misschien heeft U geen foto's van spitsboogvensters met maaswerk bij de hand. Daarom reproduceren we er hier nog twee, die U zelf zou kunnen analyseren. (Fig. 9 en 10)

KLOOSTERGANG/DOM/UTRECHT

fig. 7

Aan de hand van een voorbeeld wil ik U laten zien, hoe zo'n maaswerk te analyseren is, in de hoop dat meerdere lezers dit zelf ook gaan proberen. Als men beschikt over een exacte maattekening is zo'n analyse niet moeilijk. De middelpunten en stralen der cirkels zijn dan zonder meer terug te vinden en dat leidt dan rechtstreeks tot een onderliggend schema. Maar meestal heeft men slechts foto's waarop alles toch iet of wat vertekend is weergegeven, terwijl bovendien de breedte der stenen lijsten het bepalen van de kleinere details bemoeilijkt. Men is dan aangewezen op intuïtie en fantasie als men een sluitend meetkundig netwerk wil reconstrueren.

Figuur 7 is een foto van een spitsboog in de kloostergang bij de Utrechtse dom. Hoewel het een reconstructie is van de architect P.Cuypers (uit ca 1890) komt het maaswerk dicht bij het laat-gotische origineel.
De kolommen geven een vertikale driedeling aan, terwijl het maaswerk ook snijpunten heeft die daar precies tussen vallen. We beginnen daarom met het tekenen van de evenwijdige vertikale lijnen 1 t/m 7 (figuur 8).
We zoeken eerst de grootste cirkels op. In de top vinden we er een. Deze raakt aan twee even grote cirkels eronder en deze weer aan drie cirkels daaronder (van deze laatste cirkels is maar de helft voor het maaswerk gebruikt).
De middelpunten van al deze cirkels liggen op drie lijnen a, b, en c. Bij nadere beschouwing blijken er delen van méér cirkels van dezelfde grootte bij de constructie gebruikt te zijn: twee cirkels rechts en links op de middelste rij en ook twee cirkels rechts en links van de cirkel in de top.
We kunnen nu ook zoeken naar de best passende cirkelbogen die de spitsboog vormen. Van de punten die reeds door de voorgaande constructies zijn vastgelegd voldoen A en B het beste als middelpunten voor beide cirkelbogen. Deze laatste raken nu aan de topcirkel en aan de basiscirkels. Nu komen de kleinere cirkels aan de beurt.



Figuur 9. Kloostergang (Dom/Utrecht)   Figuur 10. Buurkerk, Utrecht

ingezonden

Muziek en Wiskunde!?

Wat in de loop der jaren aan "ARS" is vertoond komt voor het grootste deel neer op beeldende kunst. Heel begrijpelijk, litteratuur of muziek is misschien meer iets voor thuis. Toch zou ik in elk geval in Arthesis, de nieuwsbrief van Ars et Mathesis wel iets meer over muziek willen vernemen. Alleen medio 1988 verscheen een kleine beschouwing over toonsoorten, naar aanleiding van een lezing van Prof. van der Craats.
Hierbij een aantal ideeën voor wat de muziek betreft.
Over de constructie van een fuga, het verband tussen thema en neven thema's. Mogelijkheden voor stretti (een tweede stem begint als de eerste nog bezig is). Dit en nog veel meer uiteraard rekenkundig beschouwd.
Over de passacaglia en de ciacona, ook hier de voortgang op een onderliggend ijzeren ritme. Welke variaties zijn rekenkundig mogelijk?
De "basso ostinato" in het gelijknamige pianostuk van Arensky bestaat uit zes kwarten. Daar de muziek in vijfkwartsmaat geschreven is valt het werk in zes maten (30 kwarten) uiteen.
Over muziek geschreven in twaalfs-toons-technieken. Kan men dan hiermede een formele muziek construeren? Gedeeltelijk zonder enige "formule" (Cage)???
Over reeksen, die in muziekstukken voorkomen. Componisten maken nog al eens gebruik van de gulden snede. Wie kent zulke stukken?
In "Auf Flügeln der Harfe" voor akkordeon, van N.A. Huber vond ik de rij van Fibonacci.
Met wat aandacht voor deze thema's zou U mij een groot plezier doen. Gaarne Uw reacties!!

over tovervierkanten gesproken.
Ook in onze eeuw zijn er weer kunstenaars, die het niet kunnen laten om deze merkwaardige vierkanten in hun scheppingen te verwerken.
In Barcelona bij de ingang van de tempel van de Sagrada Famiiia, het bouwwerk van Antonio Gaudi troffen we onderstaand vierkant aan. De som van de getallen is hier 33, overeenkomend met de jaren van het leven van Jezus.
De architect van dit bijzondere bouwwerk Antonio Gaudi (25-06-1852 tot 10-06-1926) heeft dit symbolische vierkant in zijn schepping verwerkt. Het is een aparte belevenis om dit daar te vinden, de bouw van deze kerk is in 1896 aangevangen en tot op de dag van vandaag wordt er aan verder gewerkt, wanneer zal deze schepping zijn voltooid? Te zijner tijd mag daar nog wel een extra tovervierkant aan worden gewijd.

WIE ONTRAADSELT DIT BETOVERDE VIERKANT?