

HET DRAAKJE EN EEN BEETJE WISKUNDE

Ars et Mathesis beweegt zich op het raakvlak van kunst en wiskunde. Maar het is duidelijk dat slechts weinig kunstenaars zich ook met wiskunde bezighouden en dat het niet veel voorkomt dat wiskundigen zich wijden aan de kunst.

Bij het raakvlak blijven belangstellenden dus ieder op eigen terrein en kijken nieuwsgierig over de heg naar de tuin van hun buurman. Hier wil ik de grens even passeren en een klein stapje doen in de tuin van de wiskunde. Maar ik beloof U : het is niet moeilijk en zeer de moeite waard.

De vorige maand hebben we kennis gemaakt met het verschijnsel dat holle figuren geïnterpreteerd worden als bol. Merkwaardig is, dat een hol gezicht zich niet van ons afkeert, als we erlangs lopen (we zien immers een bol gezicht eerst en face en daarna van de zijkant), maar dat het zich naar ons toekeert, alsof het ons na blijft kijken.

Figuur 1. Het draakje met een holle kop blijft ons nastaren als we erlangs lopen



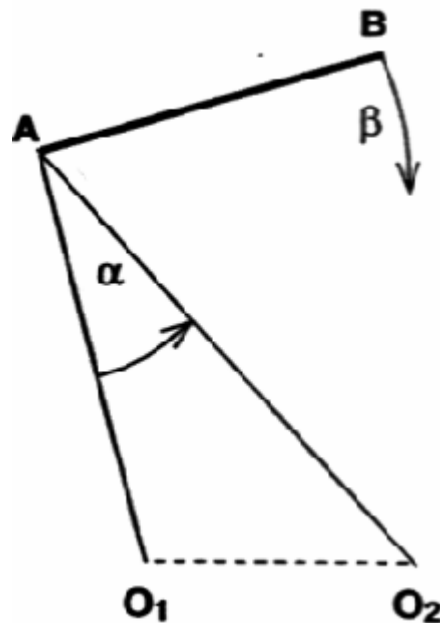
Nog merkwaardiger is dat deze draaiing veel sneller is dan we verwachten. Met vernuftige opstellingen is in psychologische laboratoria vastgesteld, dat deze draaiing twee maal zo snel verloopt als bij het lopen langs een normaal bol gezicht. Van verschillende kanten werd mij verteld, dat voor dit feit een eenvoudig wiskundig bewijs te geven was. Omdat ik een hekel heb aan het zoeken naar dingen die anderen reeds gevonden hebben, zocht ik lange tijd (tevergeefs) naar literatuur waar dit bewijs te vinden zou zijn. Mijn nieuwsgierigheid en mijn ongeduld wonnen het van mijn luiheid en ik begon zelf te puzzelen. Tot mijn verbazing vond ik binnen een kwartier een heel elementair bewijs. Hier volgt het.

Het simpele bewijs

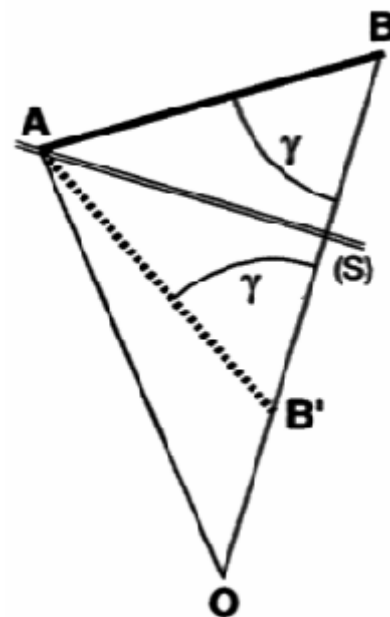
We vereenvoudigen het driedimensionale voorwerp tot een lijnstuk AB (zie figuur 2) waarbij A dicht bij het oog ligt dan B. Kijken we naar A vanuit O1 en verplaatsen we het oog naar O2, dan draait de gezichtslijn over een hoek α ; dit

komt overeen met een draaiing van AB in tegengestelde richting over een hoek beta.

Figuur 2



Figuur 3

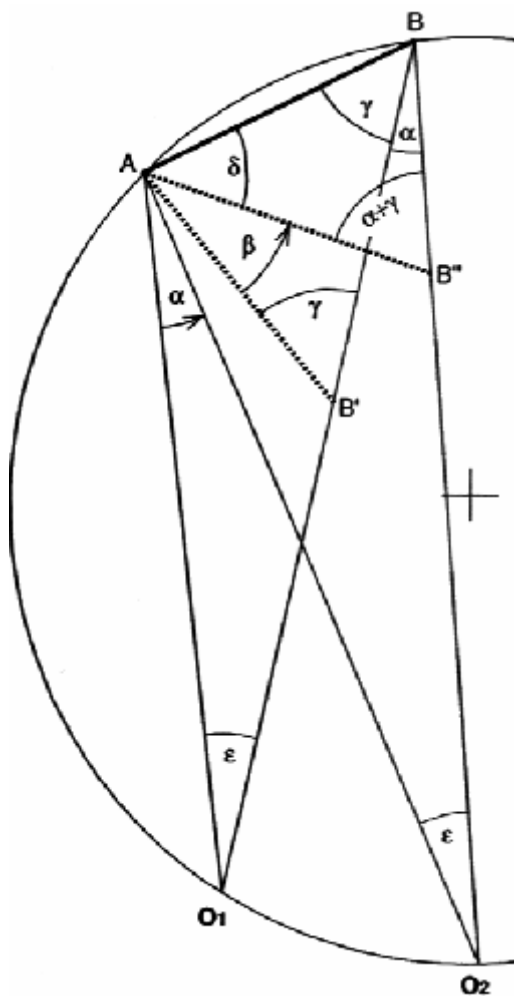


Dat is niets bijzonders, we zien dat dagelijks om ons heen gebeuren als we langs een gezicht of een bos bloemen lopen.

Kijken we naar [figuur 3](#), dan ligt B op de zichtlijn OB. Er zijn echter geen gegevens over de afstand waarop wij B zien. Maar we kiezen het beeld B' zo, dat $AB = AB'$.

Dat is niet zo willekeurig als het lijkt. Als we een hol masker bekijken, waarbij de punt van de neus het verste van ons af is, zien we een normaal (bol) masker met het punt van de neus het dichtste bij het oog. En dat zonder vervormingen: de neus wordt bijvoorbeeld niet plotseling een heel lange Pinocchio-neus!

Figuur 4



In figuur 4 is eerst een cirkel getekend door A en B en door de beginpositie van het oog O1. Het oog beweegt zich naar rechts, naar O2. Voor een eenvoudige bewijsvoering is O2 ook op de cirkelomtrek getekend. Als de afstand van het oog tot AB niet al te klein is, zal de praktische uitkomst weinig afwijken van de theoretische draaiing, namelijk 2 keer zo snel.

Nu volgt het bewijs.

Vanuit O1 zien we AB als AB' en vanuit O2 zien we AB als AB''.

Het inverse beeld van AB is dan gedraaid over een hoek beta en het niet inverse beeld (dat we dus niet waarnemen) over een hoek alpha.

We moeten dus bewijzen: $\beta = 2\alpha$

Dit gaat als volgt.

Omdat A, B, O1 en O2 op een cirkel liggen en de driehoeken ABB' en AB''B gelijkbenig zijn, zijn de bijbehorende basishoeken gelijk (gamma en alpha + gamma).

Daaruit volgt $\delta = 180 - 2(\alpha + \gamma)$ en $\beta + \delta = 180 - 2\gamma$, dus $\delta = 180 - 2\gamma - \beta$

Daaruit volgt

$\delta = 180 - 2(\alpha + \gamma) = 180 - 2\alpha - 2\gamma = 180 - 2\gamma - \beta$.

Dus $\beta = 2\alpha$.

Het draakje

Het draakje waarvan [hierboven](#) twee foto's vanuit verschillende standpunten zijn afgebeeld, is zeker geen kunst met een grote K. Maar het is wel kunstig. De kop is hol en het is te maken uit de afbeelding die ik hier voor U weergeef.

Het is in een wip gemaakt: print het uit op een A4-tje en volg de aanwijzingen die er op staan.

Het illustreert op een indrukwekkende manier het besproken verschijnsel.

Dit als troost voor degenen die mijn wiskundig praatje niet zo waarderen.



(Druk deze *bouwplaat* eventueel desgewenst op A4 format af.)