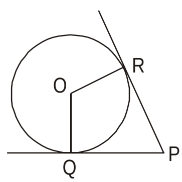
oplossingen sangaku-opdrachten

In de laatste Arthesis van 1999 stonden 4 sangaku-opdrachten, die tevens de grondslag vormen voor het “sangaku-kwartet” dat op de Ars et Mathesisdag 1999 werd gepresenteerd. Hieronder staan de oplossingen. Kwartet (4 kaarten plus oplossingen) en sangaku-poster kunnen nog worden besteld, in nederlandstalige of in engelse versie.

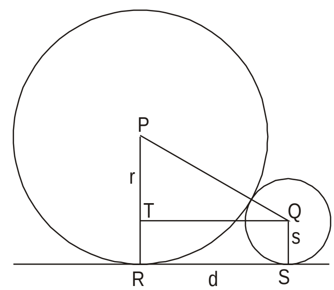
Sangaku-opdrachten - zoals deze ook - hebben vaak met cirkels en raaklijnen te maken. Een raaklijn is een lijn die met de cirkel precies één punt gemeenschappelijk heeft, namelijk het raakpunt. Om met sangaku’s aan de slag te kunnen gaan is het nuttig de volgende eigenschappen van raaklijnen te kennen. Ze zijn eigenlijk stellingen: probeer eerst deze te bewijzen.



(I) Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal die het raakpunt met het middelpunt van de cirkel verbindt: OQ staat loodrecht op QP en OR loodrecht op RP.

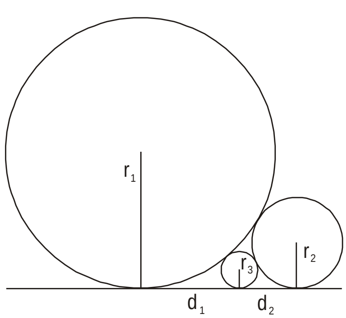
(II) Van een punt P buiten een cirkel lopen twee raaklijnen erheen. De afstand van P tot de raakpunten is uit te drukken met behulp van de stelling van Pythagoras:
$QP^2 = OP^2 - r^2$ en $RP^2 = OP^2 - r^2$.
In het bijzonder geldt dat $QP = RP$.

(III) Als twee cirkels elkaar raken, dan ligt het raakpunt op de lijn die door het middelpunt van de cirkels loopt.



Kijk naar de figuur. Laat de straal van de cirkels r en s zijn, zo dat $r > s$. Volgens (I) is $TQSR$ een rechthoek, zodat $PT = r - s$. Volgens (III) geldt: $PQ = s + r$.

Nu gebruiken we de stelling van Pythagoras om d als de lengte van een zijde in de rechthoekige driehoek PQT te bepalen, namelijk: $d^2 = PQ^2 - PT^2$.
Als we aan de rechterkant $PT = r - s$ en $PQ = s + r$ invullen, dan krijgen we dat: $d = 2 \times \sqrt{sr}$.



De te bewijzen formule is: $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$.

Hieruit volgt dat $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}}$ groter is dan $\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$ en $\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$.

Dus r_3 moet de straal zijn van de kleinste cirkel. Kijk nu naar de figuur, waarin we aangenomen hebben dat $r_1 > r_2 > r_3$. Van de oplossing hierboven weten we al dat:

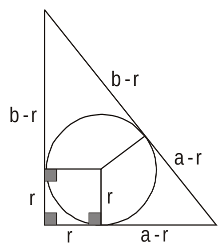
$d_1 = 2 \times \sqrt{r_1 r_3}$, $d_2 = 2 \times \sqrt{r_2 r_3}$ en

$d_1 + d_2 = 2 \times \sqrt{r_1 r_2}$.

Dus $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_3}$.

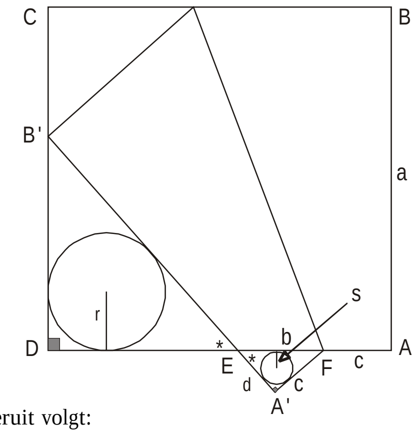
Door beide kanten van deze vergelijking te delen door $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ krijgen we wat te bewijzen was.

Deze sangaku kan men goed demonstreren door een vierkant stuk papier zo te vouwen, dat een hoekpunt B ergens op de zijde CD terecht komt. We noemen dit punt B'. De opgave is om te bewijzen dat, waar men B' ook kiest, altijd geldt dat $r=d$. r is de straal van de in een rechthoekige driehoek ingeschreven cirkel. I.h.a. geldt dat de diameter van de in een rechthoekige driehoek ingeschreven cirkel gelijk is aan de som van de twee rechte zijden minus de schuine zijde. Dit is makkelijk te bewijzen als men opmerkt dat de raakpunten op de rechthoekszijden, het rechthoekige punt en het midden van de cirkel een vierkant vormen: zie de figuur.



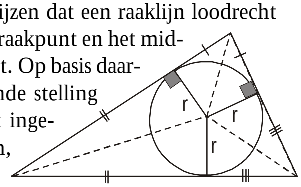
Bovendien verdelen de raakpunten de zijden in zes stukken, waarvan de stukken met hetzelfde hoekpunt paarsgewijs even lang zijn. Dus: $r = \dfrac{a + b - c}{2}$.

In de figuur rechts zijn de twee driehoeken $FA'E$ en $B'DE$ gelijkvormige rechthoekige driehoeken. Daarin is de verhouding van de straal van de ingeschreven cirkel tot een zijde hetzelfde, dus $\dfrac{r}{DE} = \dfrac{s}{A'E}$ en $\dfrac{r}{B'E} = \dfrac{s}{EF}$.

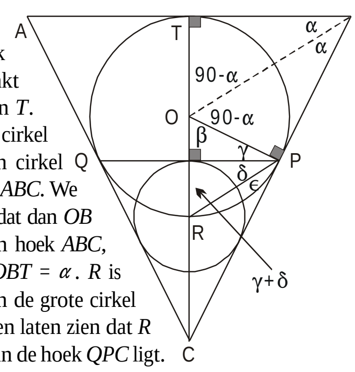


Hieruit volgt:
$r(EF - A'E) = s(B'E - DE)$. Maar $EF - A'E = b - d$ en
$B'E - DE = (a - d) - (a - (b + c)) = b + c - d$.
Verder zagen we al dat $s = ½(d + c - b)$, zodat:
$r(b - d) = ½(c + d - b)(c + b - d) = ½(c^2 - d^2 - b^2 + 2db)$.
In de rechterkant staat $c^2 - d^2 - b^2$. Dit is gelijk aan $-2d^2$ volgens de stelling van Pythagoras.
Dus we hebben: $r(b - d) = ½(2db - 2d^2) = d(b - d)$.
Hieruit volgt dat $r = d$.

Het is makkelijk te bewijzen dat een raaklijn loodrecht staat op de straal die het raakpunt en het midden van de cirkel verbindt. Op basis daarvan kan men de beroemde stelling over de in een driehoek ingeschreven cirkel bewijzen, namelijk:



(I) De deellijnen van de hoeken van een driehoek lopen door één punt en dat punt ligt even ver van de zijden. Men kan dus rondom dit punt een cirkel trekken die elke zijde raakt: de ingeschreven cirkel van de driehoek.
(II) Het is ook waar dat er precies één punt bestaat dat van elke zijde even ver verwijderd is. Met andere woorden: er is precies één ingeschreven cirkel voor elke driehoek. De figuur boven geeft suggestie voor het bewijs.
Deze sangaku illustreert een bijzondere stelling. Men neemt een cirkel en de driehoek gevormd door twee niet parallelle raaklijnen van de cirkel en de koorde tussen de twee raakpunten. Het midden van de in deze driehoek ingeschreven cirkel ligt op de oorspronkelijke cirkel.
Om deze stelling te bewijzen kijken we naar de figuur hiernaast.



CT is de deellijn van hoek QCP en AB raakt de grote cirkel in T. Dan is de grote cirkel de ingeschreven cirkel van de driehoek ABC. We hebben gezien dat dan OB de deellijn is van hoek ABC, dus is $OBP = OBT = \alpha$. R is het snijpunt van de grote cirkel en TC. We zullen laten zien dat R op de deellijn van de hoek QPC ligt.
Omdat R ook op de deellijn van hoek QCP ligt volgt uit de stelling over het midden van een ingeschreven cirkel dat R het midden is van de in QPC ingeschreven cirkel. Ofwel, het midden van de kleine cirkel is precies R. We moeten dus alleen bewijzen dat in de figuur $\delta = \epsilon$. Maar $\beta = 180 - 2(90 - \alpha) = 2\alpha$ en $\gamma = 90 - \beta = 90 - 2\alpha$. En OPR is een gelijkbenige driehoek, want $OR = OP$. Dus $\gamma + \delta = ½(180 - \beta) = 90 - \alpha$.
Maar dan is $\delta = (\gamma + \delta) - \gamma = 90 - \alpha - (90 - 2\alpha) = \alpha$, en $\epsilon = 90 - (\gamma + \delta) = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$. Dus inderdaad: $\delta = \epsilon$.